

Averaging Operatoren,
bedingte Erwartungen und Desintegrationen
auf Räumen vektorwertiger Funktionen

von

Dieter Koch

aus Altdorf bei Nürnberg

Averaging Operatoren,
bedingte Erwartungen und Desintegrationen
auf Räumen vektorwertiger Funktionen

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Dieter Koch
aus Altdorf bei Nürnberg

Als Dissertation genehmigt
von den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 9.2.1977

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr.E.Schweizer

Erstberichterstatter: Professor Dr.D.Kölzow

Zweitberichterstatter: Professor Dr.K.Jacobs

Inhaltsverzeichnis

Einleitung		i
Bezeichnungen		vi
Kapitel I	Averaging Operatoren auf Räumen vektorwertiger Funktionen	1
§ 1	Charakterisierung von averaging Operatoren durch Einkreisbarkeit, Lokalität und Zerlegbarkeit	1
	a) Averaging Endomorphismen	1
	b) Averaging Homomorphismen	21
§ 2	Charakterisierung von averaging Operatoren durch strenge Desinte- grierbarkeit	31
	a) Averaging Endomorphismen	31
	b) Averaging Homomorphismen	47
Kapitel II	Averaging Operatoren und bedingte Erwartungen auf L^p -Räumen vektorwertiger Funktionen	51
§ 3	Charakterisierung von averaging Operatoren als bedingte Erwartungen und durch Einkreisbarkeit	51
§ 4	Charakterisierung von bedingten Erwartungen als fast lokale Operatoren	69
Kapitel III	Desintegration vektorwertiger Maße	77
§ 5	Desintegration vektorwertiger Maße auf abstrakten Grundräumen	77
§ 6	Strikte Desintegration vektorwertiger Maße auf abstrakten Grundräumen	86

Anhang	Integrationstheoretische Grundlagen	91
A	Topologische Darstellung abstrakter Integrale auf Räumen reell- bzw. vektorwertiger Funktionen	91
B	Darstellungstheorie linearer Operatoren auf vektorwertigen L^p -Räumen	99
Literaturverzeichnis		108

Einleitung

Ein Operator T auf einem Raum A von Funktionen mit Werten in einer Algebra E , der die Bedingung $A \cdot TA \subset A$ erfüllt, heißt averaging, wenn für alle Funktionen $f, g \in A$ gilt :

$$T(f \cdot Tg) = Tf \cdot Tg .$$

Der erste Teil dieser Arbeit enthält in zwei Kapiteln Charakterisierungen von averaging Operatoren und bedingten Erwartungen auf Räumen vektorwertiger Funktionen. Hierbei handelt es sich teilweise um Verallgemeinerungen von bekannten Aussagen vom skalarwertigen auf den vektorwertigen Fall, teilweise um neuartige Aussagen. Der zweite Teil der Arbeit verallgemeinert einen Existenzsatz für die Desintegration vektorwertiger Maße vom topologischen auf den abstrakten Fall.

Die wichtigsten Resultate dieser Arbeit lassen sich mit einigen Vereinfachungen wie folgt beschreiben : Das erste Kapitel, welches sich mit Operatoren auf Räumen vektorwertiger Funktionen befaßt, zerfällt entsprechend den verwendeten Beweistechniken in zwei Paragraphen. Der erste behandelt den Fall von Funktionen mit Werten in einer beliebigen normierten Algebra, der zweite den von solchen mit Werten in einer Banachalgebra.

Im ersten Paragraphen beschäftigen wir uns mit averaging Endomorphismen $T : A \rightarrow A$, wobei $A = C(X, E)$ für eine normierte Algebra E und einen kompakten topologischen Raum X .

Als Vorlage für weitere Untersuchungen diente der folgende Satz von VINCENT-SMITH [38] in einer Fassung von ORHON [29] :

Jeder beschränkte lineare Operator $T : C(X) \rightarrow C(X)$ ist genau dann averaging, wenn für alle Funktionen $f \in C(X)$ und g aus der vom Bild und von den Konstanten erzeugten Algebra mit $|f| \leq g$ gilt:
 $Tf \leq \|T\| \cdot g$.

Dieser Satz wird auf den vektorwertigen Fall verallgemeinert.

Um auch unbeschränkte Operatoren erfassen zu können, werden in dieser Arbeit sowohl funktionsbeschränkte als auch durch eine Menge R von reellwertigen Funktionen auf X/T einkreisbare Operatoren (Definition 1.6) neu eingeführt.

Bei den weiteren Überlegungen erweist es sich als fruchtbar, die von TA und denjenigen konstanten Funktionen, welche nur Funktionswerte der Bildfunktionen annehmen, erzeugte Algebra G einzubeziehen.

Die Beweismethode von ORHON wird vereinfacht und erweitert, und mit einer Reichhaltigkeitsbedingung für den Bildbereich ergibt sich für einen Endomorphismus $T : A \rightarrow A$:

Der Operator T ist genau dann averaging und funktionsbeschränkt, wenn T durch $|G|^{+}$ einkreisbar ist.

Für beschränkte Operatoren ergibt sich hieraus mit einer spezielleren Form der Einkreisbarkeit leicht der Satz von VINCENT-SMITH.

Als Vorbild für den nächsten Satz dienten folgende klassische Aussagen von BIRKHOFF [4] :

1. Jede positive lineare averaging Projektion auf $C(X)$ ist lokal (Definition 1.16).
2. Jede positive lineare averaging Projektion T (mit einigen Zusatzvoraussetzungen) auf einer kommutativen beschränkten reellen Verbandsalgebra mit Einselement bewirkt, daß letztere skalar T -zerlegbar ist (Definition 1.30 und Fußnote S. 18).

⁺) Für eine Menge G von Funktionen mit Werten in E bezeichne $|G|$ die Menge der Beträge der Funktionen.

Da für Operatoren $T : A \rightarrow A$ aus Averaging-Eigenschaft i.a. nicht mehr Lokalität folgt, werden in dieser Arbeit der Raum S_E aller E-wertigen Funktionen auf X/T , die anstelle der Funktionen von TA die Averaging-Gleichung erfüllen, und die Bedingung $|S_E| \leq S_R^+$ eingeführt. Mit diesen Definitionen läßt sich die Äquivalenz der folgenden Aussagen zeigen :

- (i) T ist averaging und funktionsbeschränkt und $|S_E| \leq S_R$.
- (ii) T ist funktionsbeschränkt und $|G| \leq S_R$.
- (iii) S_R trennt die Punkte von X/T .
- (iv) $S_R = C(X/T)$.
- (v) T ist einkreisbar durch $C(X/T)$.
- (vi) T ist einkreisbar durch $R^{X/T}$.
- (vii) T ist lokal.
- (viii) A ist T -zerlegbar, T funktionsbeschränkt und $|S_E| \leq S_R$.

Auf Räumen von Funktionen mit Werten in einer Verbandsalgebra lassen sich ebenfalls averaging Operatoren durch Lokalität, Zerlegbarkeit und eine angepasste Form von Einkreisbarkeit beschreiben .

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich außerdem auf Homomorphismen übertragen.

Im zweiten Paragraphen des ersten Kapitels wird entscheidend von einer Verallgemeinerung des Riezischen Darstellungssatzes durch DINCULEANU [7] auf $C(X, E)$, wobei X kompakt und E eine Banachalgebra ist, Gebrauch gemacht.

Wir behandeln hier zunächst beschränkte Endomorphismen $T : C(X, E) \rightarrow C(X, E)$.

Von BIRKHOFF [4] und KELLEY [21] wurden zur Charakterisierung von averaging Operatoren T auf $C(X)$ zwei Bedingungen angegeben, die zur Existenz spezieller strikter Desintegrationen (bezüglich der kanonischen Surjektion $p : X \rightarrow X/T$) für die den Operator punktweise

⁺) s. Fußnote Seite ii

darstellenden Funktionale äquivalent sind.

Beide Bedingungen lassen sich nicht auf den abstrakten Fall übertragen. Daher wird vom Verfasser eine dritte, die strenge Desintegrierbarkeit eingeführt, welche für den topologischen Fall von Operatoren auf $C(X, E)$, wobei X kompakt ist, zu den beiden anderen Bedingungen und der Lokalität äquivalent ist.

Auf Grund der Resultate des ersten Paragraphen ergibt sich damit eine Charakterisierung von averaging Operatoren als streng desintegrierbare Operatoren.

Die vorangegangenen Ergebnisse lassen sich wieder auf den Homomorphismen-Fall übertragen. Daraus folgt auch ein Satz von MARK [24], der das eben erwähnte Ergebnis von KELLEY auf Homomorphismen von $C(X)$ nach $C(Y)$ (wobei X und Y kompakt sind) verallgemeinerte.

Das zweite Kapitel behandelt averaging Operatoren und bedingte Erwartungen auf L^p -Räumen ($1 \leq p \leq \infty$) von Funktionen (bezüglich eines reellwertigen Maßes) mit Werten in einer beliebigen Banachalgebra E .

MOY [25], DINULEANU und RAO [9] u.a. charakterisierten averaging Operatoren auf L^p -Räumen ($1 \leq p < \infty$) reellwertiger Funktionen als bedingte Erwartungen bezüglich einer Teil- $\mathfrak{G}$ -Algebra bzw. eines Teil- $\mathfrak{G}$ -Ringes.

Mit Hilfe von notwendigen Zusatzbedingungen, und beim Ergebnis von MOY mit der Radon-Nikodym-Eigenschaft, gelingt es, beide Aussagen zu verallgemeinern.

Unter der Voraussetzung, daß ein betragsinvariantes Lifting auf L_E^∞ existiert, ist es möglich, averaging Operatoren auf L_E^∞ als einkreisbar zu charakterisieren. Infolge der Äquivalenzaussagen von Paragraph 1 für einkreisbare und lokale Operatoren wird somit die Frage aufgeworfen, ob der Begriff der Lokalität auf Operatoren auf L_E^p ($1 \leq p \leq \infty$) übertragbar ist. Wie sich herausstellt, zeitigt ein derartiges Konzept

nur für bedingte Erwartungen bezüglich eines rein atomaren Teil- δ -Ringes nichttriviale Ergebnisse. In diesem Fall ergibt sich eine Charakterisierung von bedingten Erwartungen als fast lokale Operatoren (Definition 4.6) mit Zusatzeigenschaften.

Im dritten Kapitel wollen wir der Frage nach der Existenz von Desintegrationen vektorwertiger Maße nachgehen.

Von EKELAND [13] wurde ein Desintegrationssatz für vektorwertige Maße im Sinne von BOURBAKI [5], d.h. genauer für Operatoren von $K_E(X)$ (wobei X lokalkompakt und E ein Fréchetraum ist) in einen vollständigen lokal-konvexen Raum bewiesen. Dieser Satz wird für Banachräume E vom Fall topologischer Maßräume auf den abstrakten Fall verallgemeinert. Der Beweis der abstrakten Form des Satzes von EKELAND wird geführt mit Hilfe von Tensorprodukt-techniken und einer passenden Version eines Darstellungssatzes für lineare Operatoren von vektorwertigen L^p -Räumen von IONESCU-TULCEA [18]. Die Frage notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Existenz strikter Desintegrationen unter den Voraussetzungen des Satzes von EKELAND bleibt offen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr.D.Kölzow, möchte ich an dieser Stelle für die Vergabe des Themas und seine Unterstützung beim Anfertigen dieser Arbeit herzlich danken.

Bezeichnungen

Es bezeichne N die Menge der natürlichen Zahlen,
 R und C die Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen,
 $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ die erweiterte Zahlengerade.

Der Skalarenkörper sei stets R oder C .

Für alle Elemente f eines Vektorverbandes V bezeichne
 $f^+ = \sup \{f, 0\}$ den Positivteil, $f^- = (-f)^+$ den Negativ-
teil und $|f| = f^+ + f^-$ den Betrag und V_+ die Menge aller
Positivteile, $|V|$ die Menge aller Beträge.

Für eine Menge A von Funktionen f auf einer Menge X mit
 Werten in einer normierten Algebra bezeichne $\|f\|$ die durch
 $\|f\|(x) = \|f(x)\|$ ($x \in X$) definierte reellwertige Betrags-
funktion und $|A|$ die Menge aller Betragsfunktionen.

Die Restriktion einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ auf eine
 Teilmenge $X' \subset X$ wird mit $f|_{X'}$ bezeichnet.

Für $X' \subset X$ sei $1_{X'} : X \rightarrow R$ definiert durch

$$1_{X'}(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in X \setminus X' \\ 1, & \text{falls } x \in X' \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von X' oder Indikator-
funktion von X' .

Für eine Abbildung $f : X \rightarrow \bar{R}$ und $r \in R$ sei

$$\{f < r\} := \{x \in X : f(x) < r\}.$$

Für zwei reelle Zahlen r, s sei

$$(r, s] := \{x \in R : r < x \leq s\}.$$

Unter einem kompakten, lokalkompakten bzw. lokalkonvexen
 Raum ist stets ein Hausdorffscher kompakter, lokalkompakter
 bzw. lokalkonvexer topologischer Raum zu verstehen.

Zu einem normierten Vektorraum E und einem lokalkompakten
 Raum Z bezeichne $\mathcal{K}_E(Z)$ den Raum aller stetigen Funktionen
 $f : Z \rightarrow E$ mit kompaktem Träger, $C_0(Z, E)$ den Raum derjenigen
stetigen Funktionen $f : Z \rightarrow E$, die im Unendlichen verschwin-
den und $C(Z, E)$ den Raum aller stetigen Funktionen $f : Z \rightarrow E$.
 Bei Räumen reellwertiger Funktionen wird meist R weg-
 gelassen und kurz $\mathcal{K}(Z)$ usw. geschrieben.

Gewöhnlich wird nicht unterschieden zwischen Funktionen mit Werten in einer normierten Algebra mit Eins, die nur reelle Vielfache der Eins annehmen, und reellen Funktionen, ebenso nicht zwischen Funktionen auf einem Quotientenraum einer Menge X und Funktionen auf X , die auf jeder Klasse konstante Werte annehmen.

Für zwei Funktionen $f : X \rightarrow E$ und $g : E \rightarrow F$ bezeichne $g \circ f$ die durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ ($x \in X$) definierte Funktion .

Es bezeichne E^X die Menge aller Funktionen $f : X \rightarrow E$ und $\mathcal{L}^*(E, F)$ (bzw. $\mathcal{L}(E, F)$) für zwei topologische Räume E und F den Raum aller (bzw. aller stetigen) linearen Abbildungen von E nach F .

Bei Folgen und Familien wird häufig die Indexmenge weggelassen und die Schreibweise (A_i) verwendet .

Ein positives reelles Funktional L auf einem Funktionenvektorverband D reellwertiger Funktionen heißt σ -stetig, falls für jede absteigende Folge

$(f_n) \subset D$ mit $\inf_n f_n = 0$ (punktweise) gilt :

$$\inf_n L(f_n) = 0 .$$

Für eine Teilmenge Y einer Menge X bezeichne $\bar{Y} = X \setminus Y$ das Komplement von Y .

Die maßtheoretischen Bezeichnungen und Begriffe für Integrale vektorwertiger Funktionen bezüglich eines vektorwertigen Maßes werden im Sinne von DINULEANU [7] verwendet .

Es bezeichne stets $\sim : f \rightarrow \tilde{f}$ die Einbettungsabbildung von einem (vektorwertigen) $\mathcal{L}^P$ -Raum in den zugehörigen normierten Raum .

Kapitel I

Averaging Operatoren auf Räumen vektorwertiger Funktionen

§ 1 Charakterisierung von averaging Operatoren durch Einkreisbarkeit, Lokalität und Zerlegbarkeit

In diesem Paragraphen seien stets X eine nichtleere Menge, E eine normierte Algebra oder eine Verbandsalgebra und A ein Raum von Funktionen auf X mit Werten in E . Falls nichts anderes angegeben ist, sei E eine normierte Algebra.

a) Averaging Endomorphismen

In diesem Abschnitt seien stets $T : A \rightarrow A$ ein bildhomogener linearer Operator mit $A \cdot TA \subset A$ und $A \cdot E(TA) \subset A$ im folgenden Sinne:

1.1 Definition :

Der Operator T heißt averaging, wenn für alle Funktionen $f, g \in A$ gilt:

$$T(f \cdot Tg) = Tf \cdot Tg .$$

Es bezeichne $E(TA)$ die Menge aller konstanten Funktionen $h = g(x)$ mit $g \in TA$ und $x \in X$.

Der Operator T heißt bildhomogen, falls für alle Funktionen $f \in A$ und alle $e \in E(TA)$ gilt :

$$T(f \cdot e) = Tf \cdot e^+).$$

Falls $A \cdot E \subset A$ gilt, heißt T E-homogen, wenn für alle Funktionen $f \in A$ und alle $e \in E$ gilt:

$$T(f \cdot e) = Tf \cdot e .$$

⁺) Die Elemente von E werden mit den entsprechenden konstanten Funktionen identifiziert.

1.2 Bemerkung :

Gilt eine der folgenden Voraussetzungen, so ist ein Operator $T_0 : A \rightarrow A$ bildhomogen:

- (1) $A \cdot E \subset A$ und T_0 ist E -homogen .
- (2) T_0 ist averaging und $E(T_0 A) \subset T_0 A$.
- (3) $E = \mathbb{R}$.

Mit geringen Änderungen läßt sich folgender Satz von ORHON übertragen:

1.3 Satz (ORHON [29] , p.139) :

Es seien X kompakt, A eine abgeschlossene Teilalgebra von $C(X)$, M ein A -Modul und $T_0 : M \rightarrow C(X)$ ein linearer Operator . Äquivalent sind dann die Aussagen:

- (i) $T_0(f \cdot g) = T_0 f \cdot g$ für alle $f \in M$ und $g \in A$.
- (ii) Es existiert eine sublineare Abbildung $p : M \rightarrow C(X)$ mit den Eigenschaften
 - (a) $p(f \cdot g) = pf \cdot g$ für alle $f \in M$ und $g \in A$.
 - (b) $T_0 f \leq pf$ für alle $f \in M$.

Dabei kann p symmetrisch, d.h. mit $p(-f) = pf$ für alle $f \in M$, gewählt werden.

1.4 Satz :

Es sei $E(TA) \subset TA$.

Äquivalent sind die Aussagen:

- (i) T ist averaging .
- (ii) Es existiert eine sublineare Abbildung $p : A \rightarrow |A|$ mit den Eigenschaften
 - (a) $p(f \cdot g) \leq pf \cdot |g|$ für alle $f \in A$ und $g \in TA$.
 - (b) $|Tf| \leq pf$ für alle $f \in A$.

Beweis :

Falls T averaging ist, besitzt die Abbildung
 $p : A \rightarrow |A|$, definiert durch $pf := |Tf|$ für alle
 $f \in A$, die gewünschten Eigenschaften.

Sei nun umgekehrt $p : A \rightarrow |A|$ eine sublineare
 Abbildung mit diesen Eigenschaften.

Dann gilt für alle Funktionen $f \in A$, $g \in TA$ und alle
 $x \in X$, daß $|T(f \cdot g) - Tf \cdot g(x)| = |T(f \cdot (g - g(x)))| \leq$
 $\leq p(f \cdot (g - g(x))) \leq pf \cdot |g - g(x)|$.

Da $|g - g(x)|(x) = 0$, ist T averaging.

Der nächste Satz wird zunächst mit einer vereinfachten
 Beweismethode auf den vektorwertigen Fall verall-
 gemeinert und bildet das Vorbild für eine Reihe weiterer
 Sätze. Die folgende Fassung stammt von ORHON [29], p.140,
 Theorem 1.

1.5 Satz (VINCENT-SMITH [40], p.673) :

Seien X kompakt, $A = C(X)$, T beschränkt und G die
 von TA und den Konstanten erzeugte abgeschlossene
 Algebra. Dann ist T genau dann averaging, wenn für
 alle Funktionen $f \in A$ und $g \in G$ mit $|f| \leq g$ gilt:

$$Tf \leq T \cdot g.$$

Um auch unbeschränkte Operatoren erfassen zu können,
 werden in dieser Arbeit funktionsbeschränkte und einkreis-
 bare Operatoren eingeführt.

1.6 Definition :

Für jedes $x \in X$ heißt die Menge

$[x]_T := \{y \in X : (Tf)(y) = (Tf)(x) \text{ für alle Funktionen } f \in A\}$
 die T-Klasse von x . Oft wird kurz " $[x]$ " geschrieben.

Es bezeichne X/T die Menge aller T -Klassen .

Der Operator T heißt funktionsbeschränkt, falls für alle Funktionen $f \in A$ eine Funktion $h_f : X/T \rightarrow \mathbb{R}^+$ existiert derart, daß für alle Funktionen $g : X/T \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \cdot g \in A$ und $|f \cdot g| \leq 1$ gilt :

$$|T(f \cdot g)| \leq h_f .$$

Für eine Menge R reellwertiger Funktionen auf X/T heißt T einkreisbar durch R , falls für jede Funktion $f \in A$ eine Funktion $h_f : X/T \rightarrow \mathbb{R}$ existiert derart, daß für alle Funktionen $g : X/T \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \cdot g \in A$ gilt : $h_f \cdot g = h_f$ und für alle Funktionen $g \in R$ mit $|f| \leq |g|$ gilt :

$$|Tf| \leq h_f \cdot |g| .$$

Falls A nur beschränkte Funktionen enthält und T beschränkt ist, heißt T normeinkreisbar durch R , genau wenn T einkreisbar durch R ist und für alle $f \in A$ gilt :

$$h_f = \|Tf\| .$$

Der Raum A heißt durch R beschränkt, wenn für alle Funktionen $f \in A$ eine Funktion $g \in R$ mit $|f| \leq |g|$ existiert.

S_E bezeichne den Raum aller E -wertigen Funktionen g auf X/T mit $f \cdot g \in A$ für alle $f \in A$ und

$$T(f \cdot g) = Tf \cdot g .$$

Im Text wird statt S_E kurz S geschrieben .

Jeder beschränkte Operator ist funktionsbeschränkt. Die Umkehrung ist jedoch nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt :

⁺) Funktionen, die auf jeder T -Klasse konstante Werte annehmen, werden mit Funktionen auf X/T identifiziert.

1.7 Beispiel :

Seien $X = [0,1]$, E die Algebra aller reellen Folgen mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Gliedern, versehen mit der Supremumsnorm, und A die Algebra aller Funktionen aus $C(X,E)$, die nur endlich viele nicht verschwindende reellwertige Komponentenfunktionen besitzen. Wir definieren einen linearen funktionsbeschränkten averaging Operator $T : A \rightarrow A$ durch $Tf := (n \cdot f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$.
 T ist nicht beschränkt.

1.8 Satz :

Die Algebra E sei mit einem Einselement versehen.
 Es bezeichne G die von TA und $E(TA)$ erzeugte Algebra.
 Für alle Funktionen $f \in A$ und alle $x \in X$ gelte :

(1) In $TA + E(TA)$ existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$

reellwertiger Funktionen mit $\frac{f}{g_n} \in A$ und $|f| \leq |g_n|$
 für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\inf_n |g_n|(x) = \inf \{ |g|(x) : g \in TA + E(TA), |f| \leq |g| \}.$$

Dann ist T genau dann averaging und funktionsbeschränkt, wenn T durch $|G|$ einkreisbar ist.

Beweis :

Sei T averaging und funktionsbeschränkt.

Seien $f \in A$ und $x \in X$.

Da T averaging ist, ist G die direkte Summe $TA + E(TA)$.

Wir wählen nach (1) eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Es ist $|\frac{f}{g_n}| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und da T averaging und

funktionsbeschränkt ist, folgt :

$$|Tf|(x) = |T(\frac{f}{g_n})|(x) \cdot |g_n|(x) \leq h_f(x) \cdot |g_n|(x).$$

Also ist T einkreisbar durch $|G|$.

Umgekehrt folgt daraus :

Da $E(TA) \subset G$ ist, ist offensichtlich T funktionsbeschränkt. Seien nun $f \in A$, $g \in TA$, $x \in X$ und $h \in G$ eine reellwertige Funktion mit $|f| \leq |h|$.

Die Funktion $h \cdot (g - g(x)) = h \cdot g - h \cdot g(x)$ liegt in G , und es ist $|f \cdot (g - g(x))| \leq |h| \cdot |g - g(x)| = |h \cdot (g - g(x))|$.

Da T einkreisbar ist, folgt :

$|T(f \cdot (g - g(x)))|(x) = 0$, und somit ist T averaging .

1.9 Korollar :

Sei X eine kompakte Menge, E besitze ein Einselement und A sei ein dichter Teilraum von $C(X, E)$, der durch die Menge der reellwertigen Funktionen von $TA + E(TA)$ beschränkt ist.

Es bezeichne wieder G die von TA und $E(TA)$ erzeugte Algebra. Für alle Funktionen $f \in A$ und alle $x \in X$ mit $f|_{[x]_T} = 0$ gelte Bedingung (1) von Satz 1.8 .

Dann ist T genau dann averaging und funktionsbeschränkt, wenn T durch $|G|$ einkreisbar ist.

Beweis :

Nach Satz 1.8 müssen wir nur noch für Funktionen $g \in G$, $f \in A$ und für $x \in X$ mit $f|_{[x]} \neq 0$ und $|f| \leq |g|$ unter der Voraussetzung, daß T averaging und funktionsbeschränkt ist, eine geeignete reelle Zahl $h_f(x)$ mit $|Tf|(x) \leq h_f(x) \cdot |g|(x)$ finden .

Wir können annehmen, daß $\sup_{y \in [x]} |f|(y) = 1$ ist.

Für $r := |Tf|(x)$ gilt dann $|Tf|(x) \leq r \cdot |g|(x)$.

Um zu zeigen, daß für $f \cdot h \in A$ mit $h : X/T \rightarrow \mathbb{R}$ und $|f \cdot h| \leq |g|$ auch $|T(f \cdot h)|(x) \leq r \cdot |g|(x)$ gilt, betrachten wir die Menge R aller Funktionen $h_o \in S_{\mathbb{R}}$ mit $h_o \geq \frac{1}{n}$ für irgendeine Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Da T averaging ist, ist die Menge aller reellwertigen Funktionen von G eine Teilmenge von $S_{\mathbb{R}}$ und trennt nach (1) die Punkte von X/T . Also liegt die Algebra $S_{\mathbb{R}}$ dicht in $C(X/T)$.

Weil $S_{\mathbb{R}}$ die Konstanten enthält, existiert zu $h \in C(X/T)$ mit $h \geq 0$, $f \cdot h \in A$ und $|f \cdot h| \leq |g|$ eine Folge

$(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen h konvergiert und mit $|f \cdot h_n| \leq |g| + \frac{1}{n}$ und somit $|f| \leq \frac{|g| + \frac{1}{n}}{h_n}$.

Aus der Funktionsbeschränktheit von T folgt :

$$|T(f \cdot h)| (x) = \lim |T(f \cdot h_n)| (x) \leq r \cdot |g|(x).$$

Wir können, da wir $h \geq 0$ gewählt hatten, $h_f(x) := 2r$ definieren.

Auch bei kompaktem Grundraum ist nicht jeder averaging Operator funktionsbeschränkt, wie das folgende Beispiel zeigt:

1.10 Beispiel :

Sei $X := [0, 1] \cup \{2\}$ und A die Funktionenverbandsalgebra aller Funktionen $f \in C(X)$ der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n(\nu)} a_i(\nu) \cdot e^{n_i(\nu)x}$$

für $x \in I_\nu$, wobei $(I_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}$ eine endliche Zerlegung von $[0, 1]$ in disjunkte Intervalle ist, die bezüglich der Ordnung in $\mathbb{R}$ durchnummeriert sind, und $n_i(\nu)$, $n(\nu)$ natürliche und $a_i(\nu)$ ($0 \leq i \leq n(\nu)$) reelle Zahlen sind.

Da A die Punkte von X trennt, ist A dicht in $C(X)$.

Durch die folgende Vorschrift wird ein linearer averaging Operator $T : A \rightarrow A$ mit $T1 = 1$ definiert :

$$(Tf)(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in [0, 1] \\ a_0(1), & \text{falls } x = 2 \end{cases}$$

für alle Funktionen $f \in A$ der obigen Form.

Da TA die Punkte von $X = X/T$ trennt, ist TA dicht in $C(X)$.
Für die Funktion $f \in A$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e-e^x}{e-1} & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{für } x = 2 \end{cases} \quad \text{ist}$$

$$(Tf)(x) = \begin{cases} \frac{e-e^x}{e-1} & \text{für } x \in [0, 1] \\ \frac{e}{e-1} & \text{für } x = 2. \end{cases}$$

Wählt man $g_n = (Tf)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $f \cdot g_n \in A$
und da $f|_{[0, 1]}$ isoton ist und $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$,
ist $|f \cdot g_n| \leq 1$, jedoch ist die Folge
 $(T(f \cdot g_n)(2))_{n \in \mathbb{N}} = ((\frac{e}{e-1})^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt.
Also ist T nicht funktionsbeschränkt.

1.11 Korollar zu Satz 1.8 :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.8 sei A ein Raum
beschränkter Funktionen und T sei beschränkt.
Dann ist der Operator T genau dann averaging, wenn
er normeinkreisbar durch $|G|$ ist.

1.12 Bemerkung :

Aus Korollar 1.11 folgt der Satz von VINCENT-SMITH 1.5.

Beweis:

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.5 ist G eine
abgeschlossene punktetreuende Teilalgebra von $C(X/T)$,
die die Konstanten enthält, also nach dem Satz von
STONE-WEIERSTRASS gleich $C(X/T)$.

Zu $f \in A$ und $x \in X$ und einer Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ mit
 $\inf_n |h_n|(x) = \inf \{|g|(x) : g \in G, |f| \leq |g|\}$
ist durch $g_n := h_n + \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge mit den
Eigenschaften von (1) erklärt.

Da $G = C(X/T)$ sind Normeinkreisbarkeit und die
Charakterisierungsbedingung von Satz 1.5 äquivalent.

Der folgende Satz von KELLEY läßt sich mit Hilfe von Satz 1.8 verallgemeinern .

1.13 Satz (KELLEY [21] p.219, vgl. MARK [24] S. 26) :

Seien Z ein lokalkompakter Raum und $T_0: C_0(Z) \rightarrow C_0(Z)$ ein positiver linearer Operator mit $\|T_0\| = 1$ und $T_0^2 = T_0$.

Dann ist T_0 genau dann averaging, wenn $T_0(C_0(Z))$ eine Teilalgebra von $C_0(Z)$ ist .

1.14 Korollar zu Satz 1.8 :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.8 sei T einkreisbar durch $|TA+E(TA)|$.

Dann ist T genau dann averaging, wenn TA eine Algebra ist.

Durch dieses Korollar ergibt sich ein neuer Beweis für den Fall reellwertiger Funktionen:

1.15 Bemerkung :

Seien X kompakt, A ein abgeschlossener Teilraum von $C(X)$, $\|T\| = 1$ und $T^2 = T$. Ist T averaging oder TA eine Algebra, so sind die Voraussetzungen von Satz 1.8 erfüllt, und T ist einkreisbar durch $TA + R \cdot 1$.

Beweis :

Es sei T averaging oder TA eine Algebra . Da A abgeschlossen und T stetig ist, ist $TA + R \cdot 1$ eine abgeschlossene punktetrennende Teilalgebra von $C(X/T)$, also gleich $C(X/T)$. Somit sind alle Voraussetzungen von Satz 1.8 erfüllt . Nach MARK [24] S. 23, Korollar 6 ist T positiv .

Es sind 2 Fälle zu unterscheiden :

- a) Falls $1 \in A$, folgt sofort für $f \in A$, $g \in TA$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $|f| \leq g+c$, daß
 $|Tf| \leq T(g+c) \leq Tg+c = g+c$.
- b) Falls $1 \notin A$ setzen wir T durch $T'(f+c) = Tf+c$ zu einem Operator T' auf $A + \mathbb{R} \cdot 1$ mit $T'^2 = T'$ fort. Wir können A als Raum $C_0(Z)$ über einem lokal-kompakten Raum betrachten. Da T positiv ist, $\|T\| = 1$, folgt für $f \in A$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f + c \geq 0$, daß $-f \leq c$, somit $-Tf \leq c$ und damit $Tf+c \geq 0$, d.h. T' ist positiv. Nach Fall a) ist die Behauptung bewiesen.

1.16 Definition :

Der Operator T heißt lokal, falls für alle $f \in A$ und $x \in X$ gilt:

$$\text{Aus } f|_{[x]_T} = 0 \text{ folgt } (Tf)|_{[x]_T} = 0.$$

BIRKHOFF führte den Begriff "lokal" ein und bewies :

1.17 Satz (BIRKHOFF [4] p.149, Théorème 10) :

Seien X kompakt, $A = C(X)$ und $T : A \rightarrow A$ ein positiver linearer averaging Operator mit $T1 = 1$. Dann ist T lokal.

1.18 Bemerkung :

Unter den Voraussetzungen des Satzes 1.17 ist T genau dann averaging, wenn S_R die Punkte von X/T trennt.

Beweis :

Falls T averaging ist, ist $TA = C(X/T) \subset S_R$.

Falls S_R die Punkte von X/T trennt, ist

$$S_R = C(X/T) \supset TA.$$

Wir zeigen die folgende Verallgemeinerung des Satzes von BIRKHOFF, die später zu einer Charakterisierung von averaging Operatoren führt :

1.19 Satz :

Seien X kompakt, A ein Teilraum von $C(X, E)$ und T nicht notwendigerweise bildhomogen. Weiter existiere eine die Punkte von X/T trennende Teilmenge R von $C(X/T)$ mit $A \cdot R \subset A$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i) T ist funktionsbeschränkt, und S_R trennt die Punkte von X/T .
- (ii) T ist einkreisbar durch $C(X/T)$.
- (iii) T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/T}$.
- (iv) T ist lokal

und falls A abgeschlossen ist

- (v) $S_R = C(X/T)$.

Beweis :

Der Beweis verläuft in der Reihenfolge

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

Seien T funktionsbeschränkt und S_R punkt-trennend. Da S_R die Konstanten enthält und eine Algebra ist, liegt S_R dicht in $C(X/T)$.

Es bezeichne $\bar{T}$ die durch $\bar{T}(f \cdot g) := T f \cdot g$ für alle $f \in A$ und $g \in C(X/T)$ definierte funktionsbeschränkte Fortsetzung von T auf $A \cdot C(X/T)$. T ist eindeutig bestimmt, da für alle Folgen $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_R$, die

gleichmäßig gegen g konvergieren, die Folgen $(T(f \cdot g_n))_{n \in \mathbb{N}} = ((T f) \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen

$T f \cdot g$ konvergieren und T funktionsbeschränkt ist.

Seien $f \in A$, $g \in C(X/T)$ mit $\|f\| \leq g$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\|T f\| = \left\| T \left(\frac{f}{g + \frac{1}{n}} \right) \right\| \cdot \left(g + \frac{1}{n} \right) \leq h_f \cdot \left(g + \frac{1}{n} \right).$$

Also ist T einkreisbar durch $C(X/T)$.

Einer im Beweis von Satz 1.5 durch ORHON verwendeten Idee folgend, definieren wir für $f \in A$ und $x \in X$:

$$(Vf)(x) := \sup \{ |f|(y) : y \in [x] \}.$$

Nach VINCENT-SMITH [37] p.81 ist Vf eine nach oben halbstetige Funktion. Da jede nach oben halbstetige beschränkte reelle Funktion das punktweise Infimum derjenigen stetigen reellwertigen Funktionen ist, die sie majorisieren, ist für alle $x \in X$

$$(Vf)(x) = \inf \{ g(x) : g \in C(X/T), |f| \leq |g| \}.$$

Ist T einkreisbar durch $C(X/T)$, so folgt :

$$\|Tf\| \leq h_f \cdot Vf, \text{ d.h. } T \text{ ist einkreisbar durch } R^{X/T}.$$

Jeder Operator mit dieser Eigenschaft ist lokal.

Ist T lokal, so ist T funktionsbeschränkt und da $R \subset S_R$ ist, ist S_R punktstetrennend. Die letzte Aussage folgt aus den Überlegungen am Anfang des Beweises.

1.20 Korollar :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.19 sei T beschränkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i^o) S_R trennt die Punkte von X/T .
- (ii^o) T ist normeinkreisbar durch $C(X/T)$.
- (iii^o) T ist normeinkreisbar durch $R^{X/T}$.
- (iv) T ist lokal .

Beweis :

Man kann in allen Beweisschritten annehmen, daß $h_f = \|T\|$ für alle $f \in A$.

Nun folgt eine Charakterisierung von averaging Operatoren, die auch wieder Satz 1.17 von BIRKHOFF und Satz 1.5 von VINCENT-SMITH verallgemeinert.

1.21 Satz :

Es sei G die von TA und $E(TA)$ erzeugte Algebra .

Falls A auch unbeschränkte Funktionen enthält, sei für alle Mengen R reellwertiger Funktionen auf X/T mit $A \cdot R \subset A$ auch $A \cdot \bar{R} \subset A$. Es gelte $A \cdot |S| \subset A$.

Für alle $f \in A$ und $x \in X$ sei

$$(2) \inf \{ |g|(x) : g \in G, |f| \leq |g| \} = \inf \{ |g|(x) : g \in \mathbb{R}^{X/T}, |f| \leq |g| \}.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging und funktionsbeschränkt und $|S| \subset S_R$.
- (ii) T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/T}$.
- (iii) T ist lokal .

Beweis :

Wir zeigen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) .

Sei T averaging und funktionsbeschränkt und $|S| \subset S_R$.

Da $|G| \subset |S| \subset S_R$ ist, ist S_R eine Funktionsverbandsalgebra, die die Konstanten enthält, und die Punkte von X/T trennt .

Nach Anhang A Satz 9 und Lemma 11 existiert ein kompakter Raum Z , in dem X/T dicht liegt, und die Menge aller Fortsetzungen von Funktionen aus dem Funktionenvektorverband S_{Rb} (aller beschränkten Funktionen von S_R) liegen dicht in $C(Z)$.

Enthält A nur beschränkte Funktionen, so setzen wir analog zum Beweis von Satz 1.19 T zu einem funktionsbeschränkten Operator $\bar{T}$ auf $A \cdot \bar{S}_{Rb}$ fort . Andernfalls definieren wir $\bar{T} = T$.

Seien nun $f \in A$, $g \in G$ mit $|f| \leq |g|$, insbesondere $|g| \in S_R$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(\frac{1}{|g| \wedge n + \frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}} \subset S_{Rb}$ gleichmäßig gegen die Funktion $\frac{1}{|g| + \frac{1}{n}}$, die demzufolge auch in $\bar{S}_{Rb}$ liegt .

$$\text{Es folgt : } |Tf| = |\bar{T}(\frac{f}{|g| + \frac{1}{n}})| \cdot (|g| + \frac{1}{n}) \leq h_f \cdot (|g| + \frac{1}{n})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. T ist einkreisbar durch $|G|$.

Nach Bedingung (2) ist dann T einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/T}$.

Jeder durch $\mathbb{R}^{X/T}$ einkreisbare Operator ist lokal . Jeder lokale bildhomogene Operator ist averaging und trivialerweise funktionsbeschränkt . Da $A \cdot |S| \subset A$ ist, ist offensichtlich $|S| \subset S_R$.

Für die Charakterisierung von averaging Operatoren als lokale Operatoren ist Bildhomogenität notwendig.

1.22 Bemerkung :

- a) Jeder lokale averaging Operator $T_0 : A \rightarrow A$ mit $A \cdot E(T_0 A) \subset A$ ist bildhomogen.
- b) Ist T lokal und bildhomogen, so ist T averaging.

In gewisser Weise ist Eigenschaft (2) eine natürliche Bedingung.

1.23 Bemerkung :

Sei T lokal.

Dann existieren ein Raum A' von E -wertigen Funktionen auf X , der A umfaßt, ein linearer bildhomogener Operator $T' : A' \rightarrow A'$ mit $A' \cdot E(T' A') \subset A'$, der T fortsetzt, averaging, lokal und funktionsbeschränkt ist, $|S'| \subset S'_R$, Bedingung (2) erfüllt und für alle Mengen R reellwertiger Funktionen auf X/T' mit $A' \cdot R \subset A'$ gilt auch $A' \cdot \bar{R} \subset A'$.

Beweis :

Wir wählen für A' den Produktraum $\prod_{y \in X/T} \{ f|_{[x]} : f \in A, y = [x] \}$ und für T' den durch T induzierten Operator auf A' .

Ohne Bedingung (2) ist unter den sonstigen Voraussetzungen von Satz 1.21 ein beschränkter averaging Operator auf einer Funktionenverbandsalgebra A beschränkter reellwertiger Funktionen mit $|S| \subset S_R$ i.a. nicht lokal, wie das folgende Beispiel zeigt.

1.24 Beispiel :

Seien $X = [0, 1]$ und A die Funktionenverbandsalgebra aller beschränkten reellwertigen, auf $(0, 1]$ stetigen Funktionen auf X .

Für alle $f \in A$ sei Tf die stetige Fortsetzung von f auf X .

Es ist $S = S_{\mathbb{R}} = C(X)$.

Für $f := 1(0, 1]$ ist $f|_{[0]_T} = 0$, jedoch $(Tf)|_{[0]_T} = 1$, also T nicht lokal .

1.25 Korollar zu Satz 1.21 :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.21 seien A ein Raum beschränkter Funktionen und T beschränkt.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i') T ist averaging und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/T}$.
- (iii) T ist lokal .

Für kompakte topologische Räume X und Teilräume A von $C(X/E)$ ist Bedingung (2) überflüssig, und vielseitigere Charakterisierungsmöglichkeiten sind gegeben.

1.26 Satz :

Seien X kompakt, A ein Teilraum von $C(X, E)$ mit $A \cdot |S| \subset A$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging und funktionsbeschränkt und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) T ist funktionsbeschränkt und $|TA + E(TA)| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (iii) T ist funktionsbeschränkt, und $S_{\mathbb{R}}$ trennt die Punkte von X/T .
- (iv) T ist einkreisbar durch $C(X/T)$.
- (v) T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/T}$.
- (vi) T ist lokal .

und falls A abgeschlossen ist :

- (vii) T ist funktionsbeschränkt und $S_{\mathbb{R}} = C(X/T)$.

Beweis :

Sei T averaging und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.

Dann ist $|TA + E(TA)| \subset S_{\mathbb{R}}$.

Daraus folgt : $S_{\mathbb{R}}$ trennt die Punkte von X/T .

Sei nun T funktionsbeschränkt, und $S_{\mathbb{R}}$ trenne die Punkte von X/T .

Nach dem Beweis von Satz 1.19 folgt nacheinander :

T ist einkreisbar durch $C(X/T)$.

T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/T}$.

T ist lokal.

Umgekehrt ist jeder lokale Operator averaging und funktionsbeschränkt und erfüllt $|S| \leq S_{\mathbb{R}}$.

Die letzte Aussage folgt wie in Satz 1.19.

Die Bedingung $|S| \leq S_{\mathbb{R}}$ folgt nicht aus der Averaging-Eigenschaft, wie das folgende Beispiel zeigt.

1.27 Beispiel :

Seien $X = [0, 1]$, $E = \mathbb{R}^2$, $A = C(X, E)$ und $T : A \rightarrow A$ definiert durch $Tf := (f_1, f_2(0))$, wenn f_1, f_2 die Komponentenfunktionen von $f \in A$ bezeichnen.

Der Operator T ist beschränkt, bildhomogen, linear und averaging, jedoch nicht lokal.

Es ist $S = TA$, also $|S| = C(X)$ und $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cdot 1$.

1.28 Korollar zu Satz 1.26 :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.26 sei T zusätzlich beschränkt.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

(i') T ist averaging und $|S| \leq S_{\mathbb{R}}$.

(ii') $|TA + E(TA)| \leq S_{\mathbb{R}}$.

(iii') $S_{\mathbb{R}}$ trennt die Punkte von X/T .

(iv') T ist normeinkreisbar durch $C(X/T)$.

(v') T ist normeinkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/T}$.

(vi') T ist lokal.

und falls A abgeschlossen ist :

(vii') $S_{\mathbb{R}} = C(X/T)$.

Aus diesem Korollar folgen sofort wieder die Sätze 1.5 und 1.17, da dort $G = C(X/T)$ bzw. $TA = C(X/T)$ ist.

Unter einschränkenden Voraussetzungen ist es möglich, auf die Bedingungen $A \cdot |S| \subset A$ und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$ zu verzichten.

1.29 Korollar zu Satz 1.26 :

Seien X kompakt und A ein Teilraum von $C(X, E)$, wobei E ein Einselement besitze .

Weiter seien $|TA| \subset TA$ und $E(TA) \subset TA$.

Dann ist T genau dann averaging und funktionsbeschränkt, wenn eine der äquivalenten Aussagen (ii) - (vi) von Satz 1.26 gilt.

Beweis :

Ist T averaging, so ist $|TA + E(TA)| \subset S_{\mathbb{R}}$.

Zum Beweis, daß hieraus in Verbindung mit Funktionsbeschränktheit nacheinander die Aussagen (ii) - (vi) folgen, wurde die Bedingung $A \cdot |S| \subset A$ nicht verwendet . Somit folgt die Aussage aus Satz 1.26 .

Zur Formulierung weiterer Ergebnisse benötigen wir folgende Definition.

1.30 Definition :

Es sei $E(TA) \subset A$.

Falls A eine Algebra ist, heißt A T-zerlegbar, wenn eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Algebren und eine Familie $(T_i)_{i \in I}$ zugehöriger linearer Operatoren $T_i : A_i \rightarrow A_i$ mit folgenden Eigenschaften existiert :

- (a) A ist eine Teilalgebra der Produktalgebra $\prod A_i$.
- (b) Für alle $f = (f_i)_{i \in I} \in A$ ist $Tf = (T_i f_i)_{i \in I}$.
- (c) Für alle $f = (f_i)_{i \in I} \in A$ und alle $i \in I$ existiert $e \in E(TA)$ mit $T_i f_i = e_i$.

Die Anregung zu dieser Definition lieferte

1.31 Satz (BIRKHOFF [4] p.153, Théorème 14) :

Sei B eine beschränkte ⁺) reelle kommutative Verbandsalgebra mit multiplikativer Eins 1 und ohne idempotente Elemente.

Weiter sei $S : B \rightarrow B$ ein positiver linearer averaging Operator mit $S1 = 1$ und $\{b \in B : S(|b|) = 0\} = \{0\}$.

Sei $D := \{b \in B : S(|b|) \leq r \text{ für alle } r \in \mathbb{R} \text{ mit } r > 0\}$

Dann ist die Algebra B/D skalar T -zerlegbar ⁺⁺).

Dabei sind alle A_i ($i \in I$) Verbandsalgebren und für alle $i \in I$ das Nullideal und A_i selbst die einzigen Verbandsideale J_i in A_i mit $T_i J_i \subset J_i$.

1.32 Korollar zu Satz 1.21 und Satz 1.26 :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.21 oder Satz 1.26

seien A eine Algebra mit $E(TA) \subset A$, T funktionsbeschränkt und $|S| \in S_{\mathbb{R}}$.

Dann ist T genau dann averaging, wenn A T -zerlegbar ist.

Beweis :

Nach Satz 1.21 bzw. 1.26 ist T lokal.

Wir definieren $I = X/T$, $A_i = \{f|_i : f \in A\}$ und $T_i : A_i \rightarrow A_i$ durch $T_i f|_i = (Tf)|_i$ für alle $i \in I$, $f|_i \in A_i$ und $f \in A$ mit $f|_i = f_i$.

Also ist A T -zerlegbar.

Da T bildhomogen und $E(TA) \subset A$ ist, ist die Umkehrung offensichtlich.

Für alle $i \in I$, $f, g \in A$ gilt :

$$\begin{aligned} (T(f \cdot Tg))_i &= T_i((f \cdot Tg)_i) = T_i((f \cdot e)_i) = \\ &= (T(f \cdot e))_i = Tf_i \cdot e_i = (Tf \cdot Tg)_i \text{ für } e \in E(TA) \text{ mit} \\ (Tg)_i &= e_i. \end{aligned}$$

⁺) Beschränkt heißt : für alle $b \in B$ existiert $r \in \mathbb{R}$ mit $-r \leq b \leq r$.

⁺⁺) Skalar T -zerlegbar heißt: Eigenschaften (a) und (b) von Definition 1.30 gelten und jedes T_i ist skalarwertig.

Auch ohne Verbandsstruktur lassen sich Ideale von A_i ($i \in I$) kennzeichnen .

1.33 Bemerkung :

Es enthalte E ein Einselement und A sei eine T -zerlegbare Algebra, die die Konstante Eins und die Beträge ihrer Funktionen enthält .

Dann sind für alle $i \in I$ das Nullideal und A_i selbst die einzigen Ideale J_i in A_i mit $|T_i J_i| \subset J_i$.

Beweis :

Es seien $i \in I$ und $J_i \neq \{0\}$ ein Ideal in A_i mit

$$T_i J_i \subset J_i .$$

Für $f_i \in J_i$ mit $f_i \neq 0$ ist $T_i f_i = e_i$ für ein $e \in E(TA)$.

Also ist $r \cdot 1_i \in J_i$ für ein $r \in \mathbb{R}$ und, da J_i ein Ideal ist, $J_i = A_i$.

Aus der T -Zerlegbarkeit von A folgt nicht die Funktionsbeschränktheit von T , wie das folgende Beispiel zeigt .

1.34 Beispiel :

Wir betrachten X , A und T aus Beispiel 1.10 und definieren $I = X = X/T$.

Für jedes $i \in [0, 1]$ sei $A_i = \mathbb{R}$ und T_i die identische Abbildung und für $i = 2$ sei $A_i = A$ und

$$T_i f_i := (Tf)(2) \text{ für } f \in A .$$

Also ist A T -zerlegbar.

Für Operatoren auf Funktionsräumen von Funktionen mit Werten in einer Verbandsalgebra lassen sich die wichtigsten der vorangegangenen Ergebnisse wiedergewinnen, wenn man die formal übertragbaren der vorangegangenen Definitionen verwendet.

Sei nun unter den Generalvoraussetzungen von Abschnitt a) E eine Verbandsalgebra (statt einer normierten Algebra) mit Einselement 1, A enthalte die Konstante 1 und T sei positiv .

1.35 Satz (vgl. Satz 1.8) :

Seien A durch $|TA|$ beschränkt, $|TA| \leq TA$ und $E(TA) \leq TA$.

Es bezeichne G die von TA erzeugte Algebra.

Dann ist T genau dann averaging, wenn für alle $f \in A$ und $g \in G$ mit $|f| \leq |g|$ gilt :

$$(3) |Tf| \leq |T1| \cdot |g| .$$

Beweis :

Seien T averaging und $f \in A$, $g \in TA$ mit $|f| \leq |g|$.

Da T positiv und $|TA| \leq TA$ ist, folgt:

$$|Tf| \leq T(|f|) \leq T(|g|) = |T1| \cdot |g| .$$

Erfüllt umgekehrt T diese Bedingung, so folgt für

alle $f \in A$, $g \in TA$, $x \in X$ und $h \in TA$ mit $|f| \leq |h|$:

$|f \cdot (g - g(x))| \leq |f| \cdot |g - g(x)| \leq |h| \cdot |g - g(x)|$, und die Funktion $|h| \cdot |g - g(x)|$ liegt in G .

Also ergibt sich :

$$|T(f \cdot (g - g(x)))|(x) \leq (|T1| \cdot |h| \cdot |g - g(x)|)(x) = 0 ,$$

d.h. T ist averaging .

Ohne die Bedingungen : T positiv und $|TA| \leq TA$ ist die Aussage des Satzes für averaging Operatoren i.a. nicht mehr richtig (s. Beispiel 1.10) .

1.36 Korollar (vgl. Korollar 1.14) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.35 gelte für alle $f \in A$ und $g \in TA$ mit $|f| \leq |g|$ Bedingung (3) .

Dann ist T genau dann averaging, wenn A eine Algebra ist.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 1.35 ist ein averaging Operator i.a. nicht mehr lokal (s. Beispiel 1.24).

Es gilt jedoch :

1.37 Korollar zu Satz 1.35 (vgl. Satz 1.21) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.35 gelte
für alle $f \in A$ und $x \in X$:

$$(2') \inf \{ |g|(x) : g \in TA, |f| \leq |g| \} = \\ = \inf \{ |g|(x) : g \in E^{X/T}, |f| \leq |g| \} .$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) T ist averaging .
- (ii) Für alle $f \in A$ und $g \in E^{X/T}$ mit $|f| \leq |g|$ gilt (3) .
- (iii) T ist lokal .

1.38 Korollar (vgl. Korollar 1.32) :

Unter den Voraussetzungen von Korollar 1.37 sei
 A eine Algebra .

Dann ist T genau dann averaging, wenn A T -zerlegbar
ist .

b) Averaging Homomorphismen

Die für Endomorphismen gewonnenen Ergebnisse von Teil a)
wollen wir nun auf Homomorphismen übertragen.

In diesem Abschnitt seien stets (unter den Generalvoraus-
setzungen von § 1) Y eine weitere nichtleere Menge ,
 C ein Funktionenraum von Funktionen auf Y mit Werten in
 E , B ein Teilraum von A mit $A \cdot B \subset A$ und $A \cdot E(B) \subset A$, und
 $T : A \rightarrow C$ sei ein linearer B -homogener Operator im Sinne
von Definition 1.39 .

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß für alle $y \in Y$ eine Funktion
 $f \in A$ mit $(Tf)(y) \neq 0$ existiert und setzen voraus, daß für
alle $y \in Y$ die T -Klasse von y zu B nichtleer ist.

1.39 Definition :

Der Operator T heißt averaging zu B (Averaging Homomorphismus zu B), wenn für alle Funktionen $f \in A$ und $g \in B$ gilt :

$$T(f \cdot g) = Tf \cdot Tg .$$

Es bezeichne $E(B)$ die Menge aller konstanten Funktionen $h \equiv g(x)$ mit $g \in B$ und $x \in X$.

Der Operator T heißt B-homogen, falls für alle Funktionen $f \in A$ und $e \in E(B)$ gilt :

$$T(f \cdot e) = Tf \cdot e .$$

Für jedes $y \in Y$ heißt die Menge

$$\{y\}_T := \{x \in X : (Tg)(y) = g(x) \text{ für alle } g \in B\} \text{ die}$$

T-Klasse von y zu B . Es bezeichne X/T die Menge aller T-Klassen und $q : Y \rightarrow X/T$ die Einbettungsabbildung .

Averaging Homomorphismen wurden von MARK [24] eingeführt und stellen i.a. genau für Projektionen eine Verallgemeinerung von averaging Endomorphismen in folgendem Sinne dar .

1.40 Bemerkung :

Seien $Y = X$ und $C = A$.

a) Enthält $E(TA)$ keine nilpotenten Elemente (oder E ein Einselement 1 und TA die Konstante Eins) und ist T averaging und averaging zu TA , so ist T eine Projektion .

b) Jede Projektion T ist genau dann averaging zu TA , wenn T averaging ist .

Beweis :

a) Sei T averaging zu TA und averaging .

Für alle $f, g \in A$ gilt:

$$Tf \cdot T^2g = T(f \cdot Tg) = Tf \cdot Tg .$$

$$\text{Falls } Tf = 1, \text{ folgt direkt } T^2g = Tg .$$

Für $f = Tg - g$ ist $(T^2g - Tg) \cdot (T^2g - Tg) = 0$ und, falls $E(TA)$ keine nilpotenten Elemente besitzt, $T^2g = Tg$.

b) Die Aussage folgt unmittelbar aus den Definitionen .

1.41 Bemerkung :

Enthält E ein Einselement, B die Konstante Eins und ist T averaging zu B , so ist $T1 = 1$.

Beweis :

Es gilt $(Tf)(y) = T(f \cdot 1)(y) = (Tf)(y) \cdot (T1)(y)$ für alle $f \in A$ und $y \in Y$.

Die folgende Bemerkung findet in allen Beweisen dieses Abschnitts Verwendung.

1.42 Bemerkung :

Für alle Funktionen $g \in B$ ist $Tg = g \circ q$.

1.43 Satz (vgl. Satz 1.4) :

Es sei $E(B) \subset B$.

Äquivalent sind die Aussagen :

- (i) T ist averaging zu B .
- (ii) Es existiert eine sublineare Abbildung $p : A \rightarrow \mathbb{R}^Y$ mit den Eigenschaften :
 - (a) $p(f \cdot g) \leq pf \cdot |g \circ q|$ für alle $f \in A$ und $g \in B$.
 - (b) $|Tf| \leq pf$ für alle $f \in A$.

Beweis :

Falls T averaging zu B ist, besitzt die Abbildung $p : A \rightarrow \mathbb{R}^Y$, definiert durch $pf := |Tf|$ für alle $f \in A$, die gewünschten Eigenschaften.

Sei umgekehrt $p : A \rightarrow \mathbb{R}^Y$ eine sublineare Abbildung mit diesen Eigenschaften.

Dann gilt für alle Funktionen $f \in A$, $g \in B$ und alle $y \in Y$:

$$|T(f \cdot g) - Tf \cdot (Tg)(y)| = |T(f \cdot (g - (g \circ q)(y)))| \leq p(f \cdot (g - (g \circ q)(y))) \leq pf \cdot |Tg - (Tg)(y)|.$$

Da $|Tg - (Tg)(y)|(y) = 0$, folgt :

T ist averaging zu B .

1.44 Definition (vgl. Definition 1.6) :

Es bezeichne X/B die Menge aller Äquivalenzklassen

$$[x]_B := \{z \in X : g(z) = g(x) \text{ für alle } g \in B\}$$

($x \in X$) der durch B in X induzierten Äquivalenzrelation .

Der Operator T heißt funktionsbeschränkt zu B , falls

für alle Funktionen $f \in A$ eine Funktion $h_f : Y \rightarrow \mathbb{R}$

existiert derart, daß für alle Funktionen $g : X/B \rightarrow \mathbb{R}$

mit $f \cdot g \in A$ und $|f \cdot g| \leq 1$ gilt :

$$|T(f \cdot g)| \leq h_f .$$

Sei R eine Menge reellwertiger Funktionen auf X/B .

Der Operator T heißt einkreisbar durch R , falls für

alle Funktionen $f \in A$ eine Funktion $h_f : X/B \rightarrow \mathbb{R}$

existiert derart, daß für alle Funktionen $g : X/B \rightarrow \mathbb{R}$

mit $f \cdot g \in A$ gilt : $h_f = h_{f \cdot g}$

und für alle Funktionen $g \in R$ mit $|f| \leq |g|$ gilt :

$$|Tf| \leq h_f \cdot |g \circ q| .$$

Falls A ein Raum beschränkter Funktionen ist und T

beschränkt ist, heißt T normeinkreisbar durch R ,

genau wenn T einkreisbar durch R ist und für alle

$f \in A$ gilt :

$$h_f \equiv \|Tf\| .$$

Es bezeichne S_E den Raum aller E -wertigen Funktionen .

g auf X/B mit $f \cdot g \in A$ für alle $f \in A$ und

$$T(f \cdot g) = Tf \cdot g \circ q .$$

Im Text wird statt S_E kurz S geschrieben .

1.45 Satz (vgl. Satz 1.8) :

Die Algebra E sei mit einem Einselement versehen .

Es bezeichne G die von B und $E(B)$ erzeugte Algebra .

Für alle Funktionen $f \in A$ und alle $x \in X$ gelte :

(4) In G existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reellwertiger

Funktionen mit $\frac{f}{g_n} \in A$ und $|f| \leq |g_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\inf_n |g_n|(x) = \inf \{|g|(x) : g \in G, |f| \leq |g|\} .$$

Dann ist T genau dann averaging zu B und funktions-

beschränkt zu B , wenn T durch $|G|$ einkreisbar ist .

Beweis :

Sei T averaging zu B und funktionsbeschränkt zu B .

Da die von B erzeugte Algebra alle Eigenschaften von B besitzt, können wir annehmen, daß B eine Algebra ist. Damit ist $G = B + \overline{B}$.

Seien $f \in A$ und $y \in Y$ und $x \in q(y)$.

Wir wählen nach (4) eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G .

Es ist $|\frac{f}{g_n}| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und da T averaging zu B

und funktionsbeschränkt zu B ist, folgt :

$$|Tf|(y) = |T(\frac{f}{g_n})|(y) \cdot |Tg_n|(y) \leq h_f(y) \cdot |g_n \circ q|(y).$$

Also ist T einkreisbar durch $|G|$.

Umgekehrt folgt hieraus :

Da $E(B) \subset G$ ist, ist offensichtlich T funktionsbeschränkt zu B .

Seien nun $f \in A$, $g \in B$, $x \in X$ und $h \in G$ eine reellwertige Funktion mit $|f| \leq |h|$.

Die Funktion $h \cdot (g - (Tg)(y)) = h \cdot g - h \cdot (g \circ q)(y)$ liegt in G und es ist

$$|f \cdot (g - (Tg)(y))| \leq |h| \cdot |g - (Tg)(y)| = |h \cdot (g - (Tg)(y))|.$$

Da T einkreisbar durch $|G|$ ist, folgt :

$$|T(f \cdot (g - (Tg)(y)))|(y) = 0, \text{ d.h.}$$

T ist averaging.

Die Beweise der restlichen Ergebnisse dieses Abschnitts verlaufen ebenfalls analog zu ihren Vorbildern in Abschnitt a) unter Verwendung von Bemerkung 1.42 und werden daher weggelassen.

1.46 Korollar (vgl. Korollar 1.9) :

Seien X eine kompakte Menge, E besitze ein Einselement und A sei ein Teilraum von $C(X, E)$.

Es bezeichne wieder G die von B und $E(B)$ erzeugte Algebra und A sei durch die Menge aller reellwertigen Funktionen von G beschränkt.

Für alle Funktionen $f \in A$ und alle $y \in Y$ mit $f|_{[y]_T} = 0$ gelte Bedingung (4) von Satz 1.45 für $x \in p(y)$.
Dann ist T genau dann averaging zu B und funktionsbeschränkt zu B , wenn T durch $|G|$ einkreisbar ist.

1.47 Korollar (vgl. Korollar 1.11) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.45 seien A ein Raum beschränkter Funktionen und T beschränkt.
Dann ist der Operator T genau dann averaging, wenn er normeinkreisbar durch $|G|$ ist.

1.48 Korollar (vgl. Korollar 1.14) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.45 sei T einkreisbar durch $|B+E(B)|$.

- a) Ist T averaging zu B , so kann B zu einer Algebra mit denselben Eigenschaften erweitert werden.
- b) Ist B eine Algebra, so ist T averaging zu B .

1.49 Definition (vgl. Definition 1.16) :

Der Operator T heißt lokal zu B , falls für alle $f \in A$ und $y \in Y$ gilt :

$$\text{Aus } f|_{[y]_T} = 0 \text{ folgt } (Tf)(y) = 0.$$

1.50 Satz (vgl. Satz 1.19) :

Seien X kompakt, A ein Teilraum von $C(X, E)$ und T nicht notwendigerweise B -homogen.
Weiter existiere eine die Punkte von X/B trennende Teilmenge R von $C(X/B)$ mit $A \cdot R \subset A$.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i) T ist funktionsbeschränkt zu B , und $S_{\mathbb{R}}$ trennt die Punkte von X/B .
 - (ii) T ist einkreisbar durch $C(X/B)$.
 - (iii) T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/B}$.
 - (iv) T ist lokal zu B .
- und falls A abgeschlossen ist :
- (v) $S_{\mathbb{R}} = C(X/B)$.

1.51 Korollar (vgl. Korollar 1.20) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.50 sei T beschränkt .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i') $S_{\mathbb{R}}$ trennt die Punkte von X/B .
- (ii') T ist normeinkreisbar durch $C(X/B)$.
- (iii') T ist normeinkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/B}$.
- (iv) T ist lokal zu B .

1.52 Satz (vgl. Satz 1.21) :

Sei G die von B und $E(B)$ erzeugte Algebra .

Falls A unbeschränkte Funktionen enthält, sei für alle Mengen R reellwertiger Funktionen auf X/B mit $A \cdot R \subset A$ auch $A \cdot \bar{R} \subset A$.

Es gelte $A \cdot |S| \subset A$.

Für alle $f \in A$ und $x \in X$ sei

$$(5) \inf \{ |g|(x) : g \in G, |f| \leq |g| \} = \inf \{ |g|(x) : g \in \mathbb{R}^{X/B}, |f| \leq |g| \}.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging zu B und funktionsbeschränkt zu B und $|S| \in S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/B}$.
- (iii) T ist lokal zu B .

1.53 Korollar (vgl. Korollar 1.25) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.52 seien A ein Raum beschränkter Funktionen und T beschränkt .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i') T ist averaging zu B und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (ii') T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/B}$.
- (iii') T ist lokal zu B.

1.54 Satz (vgl. Satz 1.26) :

Seien X kompakt, A ein Teilraum von $C(X, E)$ mit $A \cdot |S| \subset A$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging zu B und funktionsbeschränkt zu B und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) T ist funktionsbeschränkt zu B und $|B+E(B)| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (iii) T ist funktionsbeschränkt zu B und $S_{\mathbb{R}}$ trennt die Punkte von X/B .
- (iv) T ist einkreisbar durch $C(X/B)$.
- (v) T ist einkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/B}$.
- (vi) T ist lokal zu B.

1.55 Korollar (vgl. Korollar 1.28) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.54 sei zusätzlich T beschränkt.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i') T ist averaging zu B und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (ii') $|B+E(B)| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (iii') $S_{\mathbb{R}}$ trennt die Punkte von X/B .
- (iv') T ist normeinkreisbar durch $C(X/B)$.
- (v') T ist normeinkreisbar durch $\mathbb{R}^{X/B}$.
- (vi') T ist lokal zu B.

und falls A abgeschlossen ist :

- (vii') $S_{\mathbb{R}} = C(X/B)$.

1.56 Korollar (vgl. Korollar 1.29) :

Seien X kompakt und A ein Teilraum von $C(X, E)$,
wobei E ein Einselement besitze .

Weiter seien $|B| \subset B$ und $E(B) \subset B$.

Dann ist T genau dann averaging zu B und funktions-
beschränkt zu B , wenn eine der äquivalenten Aussagen
(ii) - (vi) von Satz 1.54 gilt .

Wir erinnern an dieser Stelle daran, daß C der Bildraum ist .

1.57 Definition (vgl. Definition 1.30) :

Seien A und C Algebren und $E(B) \subset A$.

Das Paar (A, C) heißt T-zerlegbar zu B, falls Familien

$(A_i)_{i \in I'}$ und $(C_i)_{i \in I}$ von Algebren, wobei $I \subset I'$,

und eine Familie $(T_i)_{i \in I}$ zugehöriger linearer
Operatoren $T_i : A_i \rightarrow C_i$ mit folgenden Eigenschaften
existieren :

(a) A und C sind Teilalgebren der Produktalgebren

$$\prod_{i \in I'} A_i \text{ bzw. } \prod_{i \in I} C_i .$$

(b) Für alle $f = (f_i)_{i \in I} \in A$ ist $Tf = (T_i f_i)_{i \in I}$.

(c) Für alle $g = (g_i)_{i \in I'} \in B$ und alle $i \in I$ existiert
 $e \in E(B)$ mit $g_i = e_i$ und $T_i g_i = e_i$.

1.58 Korollar zu Satz 1.52 und Satz 1.54 (vgl. 1.21 u. 1.26) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.52 oder Satz 1.54
seien A und C Algebren mit $E(B) \subset A$, T funktions-
beschränkt zu B und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.

Dann ist T genau dann averaging zu B , wenn das Paar (A, C)
 T -zerlegbar zu B ist.

Für Operatoren auf Funktionenräumen von Funktionen mit
Werten in einer Verbandsalgebra lassen sich die wichtigsten
der vorangegangenen Ergebnisse wiedergewinnen.

Sei nun unter den Generalvoraussetzungen von Abschnitt b)
E eine Verbandsalgebra (statt einer normierten Algebra)
mit Einselement 1, A und C enthalten die Konstante 1 und
T sei positiv .

1.59 Satz (vgl. Satz 1.35) :

Es bezeichne G die von B erzeugte Algebra .
Seien A durch $|G|$ beschränkt, $G \subset |G|$ und $E(B) \subset B$.
Dann ist T genau dann averaging zu B, wenn für alle
 $f \in A$ und $g \in G$ mit $|f| \leq |g|$ gilt :
(6) $|Tf| \leq |T1| \cdot |g \circ q|$.

1.60 Korollar (vgl. Korollar 1.36) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.59 gelte für
alle $f \in A$ und $g \in G$ mit $|f| \leq |g|$ Bedingung (6) .
a) Ist T averaging zu B, so kann B zu einer Algebra
mit denselben Eigenschaften erweitert werden .
b) Ist B eine Algebra, so ist T averaging zu B .

1.61 Korollar (vgl. Korollar 1.37) :

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.59 gelte für
alle $f \in A$ und $x \in X$
(5*) $\inf \{|g|(x) : g \in B, |f| \leq |g|\} = \inf \{|g|(x) : g \in E^{X/B}, |f| \leq |g|\}$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent :
(i) T ist averaging zu B .
(ii) Für alle $f \in A$ und $g \in E^{X/B}$ mit $|f| \leq |g|$ gilt (6) .
(iii) T ist lokal zu B .

1.62 Korollar (vgl. Korollar 1.38) :

Unter den Voraussetzungen von Korollar 1.61 seien
A und C Algebren .
Dann ist T genau dann averaging zu B, wenn das
Paar (A,C) T-zerlegbar zu B ist.

§ 2 Charakterisierung von averaging Operatoren durch strenge Desintegrierbarkeit

Mit Hilfe von Integraldarstellungen lassen sich weitere Charakterisierungen erzielen .

In diesem Paragraphen seien X eine nichtleere Menge, E eine kommutative Banachalgebra und A ein Funktionenraum beschränkter Funktionen auf X mit Werten in E .

a) Averaging Endomorphismen

In diesem Abschnitt seien stets $T : A \rightarrow A$ ein bildhomogener linearer Operator mit $A \cdot TA \subset A$ und $A \cdot E(TA) \subset A$.

Zunächst definieren wir eine Reihe von Begriffen, die bei der Charakterisierung von averaging Operatoren Verwendung finden .

2.1 Definition :

Eine lineare Abbildung $U : A \rightarrow E$ heißt dominiert, falls ein G -stetiges positives lineares Funktional $L : |A| \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$\|Uf\| \leq L(|f|) \text{ für alle } f \in A .$$

Für alle $x \in X$ sei $T_x : A \rightarrow E$ der durch

$$T_x f := (Tf)(x) \text{ für } f \in A \text{ definierte Operator .}$$

T heißt punktweise dominiert, falls T_x für alle $x \in X$ dominiert ist .

T heißt streng desintegrierbar, falls für alle $x \in X$ ein Maß m_x auf X mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ existiert, das T_x darstellt, derart, daß für alle $x \in X$ und $f \in A$ mit $\{f \neq 0\} \cap [x] = \emptyset$ gilt :

Ist S eine meßbare Menge mit $S \subset \{f \neq 0\}$, so ist

$$m_x(S) = 0 .$$

Sei X ein topologischer Raum, A ein Raum stetiger Funktionen und Σ die Borelsche, d.h. die von der Topologie von X erzeugte $\mathcal{G}$ -Algebra.

T besitzt Eigenschaft (D1), falls für alle $x \in X$ ein Maß m_x auf Σ mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ existiert, so daß für alle $f \in A$ gilt :

$$(Tf)(x) = \int_{[x]} f \, dm_x,$$

und Eigenschaft (D2), falls für alle $x \in X$ ein Maß m_x auf Σ mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ existiert, das T_x darstellt, mit

$$\text{supp } m_x \subset [x],$$

wobei $\text{supp } m_x$ den Träger von m_x bezeichnet.

2.2 Bemerkung :

Seien X kompakt und $A = C(X, E)$.

Jeder beschränkte Operator T ist punktweise dominiert, und jeder punktweise dominierte Operator T ist funktionsbeschränkt.

Ein grundlegendes Hilfsmittel dieses Paragraphen bildet der folgende Darstellungssatz von DINCULEANU.

2.3 Satz (DINCULEANU [7] p.380, Theorem 2) :

Sei X kompakt.

Zu jedem dominierten linearen Operator $U : C(X, E) \rightarrow E$ existiert (genau) ein reguläres Maß m auf dem Borelschen $\mathcal{G}$ -Körper von X mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ und endlicher Variation, so daß

$$Uf = \int f \, dm \text{ für alle } f \in C(X, E).$$

Bevor wir averaging Operatoren charakterisieren, zeigen wir die Äquivalenz einiger der vorgenannten Definitionen und ihre Beziehung zu strikten Desintegrationen .

2.4 Lemma :

Seien X kompakt, $A = C(X, E)$ und T punktweise dominiert .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist lokal .
- (ii) T ist streng desintegrierbar .
- (iii) T besitzt Eigenschaft (D1) .
- (iv) T besitzt Eigenschaft (D2) .

Dabei können die auftretenden Maße als reguläre Borelmaße mit endlicher Variation gewählt werden .

Beweis :

Es wird gezeigt :

(i) $\Rightarrow$ (ii), (iii), (iv); (iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i); (iii) $\Rightarrow$ (i) .

Sei T lokal .

Für beliebiges $x \in X$ existiert zu T_x ein Maß m_x mit den Eigenschaften von Satz 2.3 . Es bezeichne μ_x die Variation von m_x .

Nach DINICULANU [7] p.380 Theorem 2 gilt für jede offene Menge $G \subset X$

$$\mu_x(G) = \sup \sum_{i=1}^n |T_x f_i| ,$$

wobei das Supremum über alle endlichen Folgen

$(f_i)_{1 \leq i \leq n} \subset C(X, E)$ mit $|f_i| \leq 1$, $f_i|_{X \setminus G} = 0$ und $|f_i| \cdot |f_j| = 0$ für $i \neq j$ gebildet wird .

Für alle offenen Teilmengen G von $X \setminus \{x\}$ folgt :

$\mu_x(G) = 0$, und da die T -Klasse $\{x\}$ abgeschlossen ist,
 $\mu_x(X \setminus \{x\}) = 0$.

Da die Variation ein endliches positives Maß ist, folgt

$\mu_x(S) = 0$ für alle meßbaren Teilmengen S von $X \setminus \{x\}$,
 also auch $m_x(S) = 0$.

Somit ist T streng desintegrierbar und besitzt die Eigenschaften (D1) und (D2) .

Nun besitze T Eigenschaft (D2) .

Für beliebiges $x \in X$ besitzt jede abgeschlossene meßbare Teilmenge F von $X \setminus \{x\}$, da $\text{supp } m_x \subset \{x\}$, eine Überdeckung durch offene Nullmengen . Da X kompakt ist, kann man die Überdeckung endlich wählen, und es folgt :

F ist eine Nullmenge .

Sei nun $f \in A$ mit $\{f \neq 0\} \cap \{x\} = \emptyset$. Es ergibt sich, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ eine Nullmenge, also auch $\{f \neq 0\}$ eine ist, d.h. T ist streng desintegrierbar .

Offensichtlich sind streng desintegrierbare Operatoren und solche mit Eigenschaft (D1) lokal .

2.5 Bemerkung :

Für den Beweis des vorangegangenen Satzes wird die multiplikative Struktur von E nicht benötigt .

2.6 Korollar :

Sei X lokal kompakt, $A = C_0(X, E)$ und T beschränkt . Dann sind die Aussagen von Lemma 2.4 äquivalent .

Beweis :

Sei Z die Einpunktkompaktifizierung von X .

Wir identifizieren die Funktionen aus $C_0(X, E)$ mit der Menge $C_0(Z, E)$ ihrer Fortsetzungen .

Jede Funktion $f \in C(Z, E)$ besitzt eine eindeutige Darstellung $f = f_0 + e$ mit $f_0 \in C_0(Z, E)$ und $e \in E$.

Durch $T'f := Tf_0 + e$ ist eine beschränkte lineare Fortsetzung T' von T auf $C(Z, E)$ gegeben.

Nach Satz 2.3 ist die Existenz von Darstellungsmaßen für T' gewährleistet, und indem wir uns auf meßbare Mengen beschränken, die den adjungierten Punkt nicht enthalten, auch für T . Für derartige Mengen bleiben die Beweismethoden von Lemma 2.4 richtig, und dieselben Aussagen sind äquivalent .

Wir erinnern uns nun an den Begriff der strikten Desintegration.

2.7 Definition :

Seien X und Y kompakt, Σ und $\mathcal{A}$ die zugehörigen Borelschen σ -Körper, $p : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung, m ein reellwertiges Maß auf Σ und $n = p(m)$ das Bildmaß von m .

Eine Abbildung $\lambda : y \rightarrow \lambda_y$ von Y in den Raum aller Maße auf Σ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt Desintegration von m bezüglich $p, \mathcal{A}$, wenn gilt :

(1) Für jede Menge $S \in \Sigma$ ist die Abbildung

$$\lambda_*(S) : Y \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar.}$$

(2) Für alle Mengen $S \in \Sigma$ und $S' \in \mathcal{A}$ gilt :

$$m(S \cap p^{-1}(S')) = \int_S \lambda_y(S') \, dn(y).$$

Eine Desintegration λ von m bezüglich p heißt strikt, wenn für alle $y \in Y$ und jede Menge $S \in \Sigma$ gilt, daß

$$\text{aus } S \cap p^{-1}(y) = \emptyset \quad \text{folgt } \lambda_y(S) = 0.$$

2.8 Bemerkung :

Seien X kompakt, $A = C(X)$ und T punktweise dominiert. Es bezeichne $Y = X/T$, $p : X \rightarrow Y$ die kanonische Surjektion, Σ den Borelschen σ -Körper von Y und m_y für alle $y \in Y$ das Darstellungsmaß von T_x mit $x \in p^{-1}(y)$ nach Satz 2.3.

Dann ist T genau dann streng desintegrierbar, wenn für jedes $y \in Y$ eine strikte Desintegration $\lambda(y)$ von m_y bezüglich $p, \mathcal{A}$ existiert, wofür gilt $\lambda(z) = 0$ für alle $z \in Y$ mit $z \neq y$.

Beweis :

Sei T streng desintegrierbar und $z \in Y$.

Für $x \in X$ mit $z = [x]$ definieren wir für alle $y \in Y$ und $S \in \Sigma$:

$$(\lambda_y(z))(S) := m_z(S \cap [x]) \cdot 1_{\{z\}}(y).$$

Dadurch ist, wie man leicht sieht, eine strikte Desintegration von m_z mit den gewünschten Eigenschaften gegeben.

Seien umgekehrt $z \in Y$, $x \in X$ mit $z = [x]$ und λ eine strikte Desintegration von m_z mit $\lambda(y)=0$ für alle $y \neq z$. Dann ist nach Gleichung (2) von Definition 2.7, da $Y \setminus \{z\}$ in Λ liegt, T streng desintegrierbar.

Eigenschaften (D1) und (D2) wurden von BIRKHOFF bzw. KELLEY für den Fall reellwertiger Funktionen eingeführt, um averaging Operatoren zu charakterisieren.

2.9 Satz (BIRKHOFF [4] p.149 Théorème 10) :

Sei X kompakt.

Jeder positive lineare averaging Operator

$T : C(X) \rightarrow C(X)$ mit $T1 = 1$ besitzt Eigenschaft (D1).

2.10 Bemerkung :

Es besitze E ein Einselement 1 , A enthalte die Konstante 1 , T sei averaging und $T1 = 1$.

Dann ist T eine Projektion.

Beweis :

Sei $f \in A$.

Es ist $T^2 f = T(1 \cdot Tf) = T1 \cdot Tf = Tf$.

2.11 Satz (KELLEY [21] p.218, Theorem 2.2) :

Sei X lokalkompakt.

Jeder beschränkte lineare Operator $T_0 : C_0(X) \rightarrow C_0(X)$ ist genau dann averaging, wenn er Eigenschaft (D2) besitzt.

Wie bereits in § 1 Bemerkung 1.27 festgestellt, ist im vektorwertigen Fall nicht jeder beschränkte averaging Operator lokal oder äquivalent dazu streng desintegrierbar. Aus den Ergebnissen von § 1 folgen sofort Verallgemeinerungen dieser Sätze von BIRKHOFF und KELLEY.

2.12 Korollar zu Satz 1.26 :

Seien X kompakt, $A = C(X, E)$ und T punktweise dominiert .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging und $|S| < S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) T ist streng desintegrierbar .

Beweis :

Die Aussage folgt direkt aus Satz 1.26 und Lemma 2.4 .

2.13 Korollar zu Satz 1.26 :

Sei X lokalkompakt, $A = C_0(X, E)$ und T beschränkt .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging und $|S| < S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) T ist streng desintegrierbar .
- (iii) T besitzt Eigenschaft (D2) .

Beweis :

Sei Z die Einpunktkompaktifizierung von X .

Wir identifizieren die Funktionen aus $C_0(X, E)$ mit ihren Fortsetzungen aus $C_0(Z, E)$.

Somit folgt die Behauptung aus Satz 1.26 und Korollar 2.6 .

Durch Einführen einer weiteren neuen Eigenschaft lassen sich mit der Beweisidee des zitierten Satzes von KELLEY ebenfalls Äquivalenzaussagen erzielen .

2.14 Definition :

Seien X kompakt, A ein dichter Teilraum von $C(X, E)$ und T punktweise dominiert .

Der Operator T besitzt Eigenschaft (N), falls für alle $x \in X$ ein Borelmaß m_x existiert, das T_x darstellt, so daß für alle $g \in TA$ gilt :

$$\text{Aus } \int f \cdot (g - g(x)) \, dm_x = 0 \text{ für alle } f \in A \\ \text{folgt } (g - g(x))|_{\text{supp } m_x} = 0 .$$

2.15 Satz :

Seien X kompakt und A ein dichter Teilraum von $C(X, E)$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging und besitzt Eigenschaft (N) .
 - (ii) T ist streng desintegrierbar .
- und falls A eine Algebra mit $E(TA) \subset A$ ist :
- (iii) A ist T -zerlegbar und T besitzt Eigenschaft (N) .

Beweis :

Sei T averaging und mit Eigenschaft (N) .

Wir wählen $x \in X$ und $g \in TA$ beliebig fest .

Da T averaging und bildhomogen ist, folgt für alle $f \in A$, daß $T(f \cdot (g - g(x)))(x) = 0$.

Für das Darstellungsmaß m_x von T_x ergibt sich :

$\int f \cdot (g - g(x)) \, dm_x = 0$ für alle $f \in A$, und weil

T Eigenschaft (N) besitzt: $g|_{\text{supp } m_x} \equiv g(x)$.

Da $g \in TA$ beliebig gewählt war, folgt :

$\text{supp } m_x \subset [x]$, d.h. Eigenschaft (D2) .

Wie im Beweis von Lemma 2.4 ergibt sich :

T ist streng desintegrierbar .

Sei nun T streng desintegrierbar .

Offensichtlich besitzt T Eigenschaft (N) .

Da T lokal ist, ist T averaging und, unter den Zusatzvoraussetzungen, A T -zerlegbar.

Ist A T -zerlegbar, so ist T averaging.

2.16 Korollar :

Seien X ein lokalkompakter Raum und A ein dichter Teilraum von $C_0(X, E)$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging und besitzt Eigenschaft (N) .
 - (ii) T ist streng desintegrierbar .
- und falls A eine Algebra mit $E(TA) \subset A$ ist :
- (iii) A ist T -zerlegbar und T besitzt Eigenschaft (N) .

Beweis :

Der Beweis verläuft vollkommen analog zu dem von Satz 2.15 unter Verwendung der Einpunktkompaktifizierung von X .

Nun betrachten wir Operatoren mit einer Eigenschaft, die (N) impliziert.

2.17 Definition :

Es enthalte E ein Einselement 1 .

Der Operator besitzt Eigenschaft (I), wenn für alle Funktionen $g \in TA$ und alle $x, y \in X$ mit $g(x) = g(y)$ das Element $(g(x) - g(y))$ von E ein Links-Inverses e in E besitzt, d.h. $e \cdot (g(x) - g(y)) = 1$.

2.18 Lemma :

Seien X kompakt, $A = C(X, E)$ und E enthalte eine Eins. Ist der Operator T punktweise dominiert und besitzt Eigenschaft (I), so besitzt er Eigenschaft (N).

Beweis :

Sei $x \in X$ und m_x stelle T_x dar.

Sei $g \in TA$ mit $\int f \cdot (g - g(x)) dm_x = 0$ für alle $f \in A$ und, da A dicht im Raum $\mathcal{L}_E^1(m_x)$ aller integrierbaren

E -wertigen Funktionen liegt und $g - g(x)$ eine beschränkte Funktion ist, sogar für alle $f \in \mathcal{L}_E^1(m_x)$.

Wir nehmen an, es gibt $y \in \text{supp } m_x$ mit $(g - g(x)) \neq 0$.

Dann ist für $h := g - g(x)$ die Menge

$U := \{z \in X : \|h(z)\| > \frac{1}{2} \|h(y)\|\}$ eine meßbare Umgebung von y .

Die Restriktion $h|_U$ ist invertierbar, und das Inverse besitzt eine stetige Fortsetzung h' auf X .

Es ist entweder $\|h(z)\| > \frac{1}{4} \|h(y)\|$ für alle $z \in X$ und damit h selbst stetig invertierbar oder es existiert

eine reellwertige Urysohnfunktion g_0 mit $0 \leq g_0 \leq 1$,
 $g_0(z) = 1$ für alle $z \in \bar{U}$ und $g_0(z) = 0$, falls
 $\|h(z)\| \leq \frac{1}{4} \|h(y)\|$, und wir definieren
 $h'(z) := g_0(z) \cdot (h(z))^{-1}$, falls $h(z) \neq 0$
 und $h'(z) = 0$ sonst.

Somit gilt für alle meßbaren Teilmengen S von U , daß
 $h' \cdot 1_S \in \mathcal{L}_E^1(m_x)$ und $m_x(S) = \int_S 1_S dm_x = \int h' \cdot 1_S \cdot h dm_x = 0$,
 d.h. die Annahme ist falsch.

Also verschwindet $h = g - g(x)$ auf $\text{supp } m_x$.

Es folgt eine Anwendung mit Hilfe eines Satzes von WERMER
 und einer geeigneten Fortsetzung auf die Disc-Algebra.

2.19 Definition :

Die Algebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen
 auf dem komplexen abgeschlossenen Einheitskreis $\bar{\Gamma}$,
 die im Innern des Einheitskreises analytisch sind,
 heißt Disc-Algebra.

Der folgende Satz findet sich z.B. in HOFFMAN [16] p.93.

2.20 Satz (WERMER) :

Die Disc-Algebra ist eine maximale abgeschlossene
 Teilalgebra der Algebra aller stetigen komplexwertigen
 Funktionen auf dem Einheitskreis.

2.21 Satz :

Sei D die Disc-Algebra und $T : D \rightarrow D$ ein beschränkter
 linearer Operator.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging.
- (ii) T ist streng desintegrierbar.
- (iii) T ist lokal.
- (iv) D ist T -zerlegbar.

Beweis :

Mit D' bezeichnen wir die Algebra aller Funktionen $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ mit

$$f(z) = \sum_{k=1}^n P_k(z) |z|^k \quad \text{für alle } z \in \Gamma,$$

wobei $n, k \in \mathbb{N}$ und $p_k \in D$ ($1 \leq k \leq n$) sind.

Da die Funktion $g : z \mapsto |z|$ nicht in D liegt, ist nach Satz 2.20 die Algebra D' dicht in $C(\Gamma, \mathbb{C})$.

Wir setzen T zu einem Operator $T' : D' \rightarrow D$ fort.

Für obiges f definieren wir

$$f' := \sum_{k=1}^n P_k(z) \quad \text{und} \quad T'f := T(f') \in D.$$

Die Eindeutigkeit und Stetigkeit von T' ergibt sich folgendermaßen :

Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $f \in D'$ mit $\|f\| < \varepsilon$, insbesondere für alle z auf dem Rande des Einheitskreises :

$|f(z)| < \varepsilon$. Eine zugehörige Funktion $f' \in D$ nimmt dort ihr Maximum an (vgl. HOFFMAN [16] p.42), d.h.

$$\|f'\| = \sup_{|z|=1} |f'(z)| = \sup_{|z|=1} |f(z)| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, sind f' und somit auch $T'f = T(f')$ eindeutig bestimmt. Da T beschränkt ist, folgt $\|T'f\| \leq \|T\| \|f'\| \leq \|T\| \|f\|$, d.h. $\|T'\| = \|T\|$.

Offensichtlich ist T' linear und läßt sich (mittels Stetigkeit) auf genau eine Weise zu einem beschränkten linearen Operator $\bar{T} : C(\Gamma, \mathbb{C}) \rightarrow C(\Gamma, \mathbb{C})$ fortsetzen. Ist T averaging, so ist nach Konstruktion T' und damit auch $\bar{T}$ averaging. Nach Satz 2.15 in Verbindung mit Lemma 2.18 ist $\bar{T}$ und damit auch T streng desintegrierbar. Die restlichen Schlüsse folgen auf gewohnte Weise (vgl. Beweis von Satz 2.15).

2.22 Bemerkung :

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.21 sind weiter äquivalent :

- (ii) T ist streng desintegrierbar.
- (v) T besitzt Eigenschaft (D1).
- (vi) T besitzt Eigenschaft (D2).

Beweis :

Sei T streng desintegrierbar .

Nach dem Beweis von Satz 2.20 in Verbindung mit Satz 2.15 besitzt $\bar{T}$ Eigenschaften (D1) und (D2) und damit auch T . Besitzt T eine der beiden Eigenschaften, so ist T lokal .

Aus der Bedingung $|S| < S_{\mathbb{R}}$ und der averaging Eigenschaft läßt sich auch Bedingung (N) direkt folgern, und damit auch ein neuer Beweis von Korollar 2.12 angeben

2.23 Lemma :

Seien X kompakt, m ein reguläres Borelmaß mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ und endlicher Variation, g eine stetige reellwertige Funktion auf X und A ein dichter Teilraum von $C(X, E)$.

Gilt für alle Funktionen $f \in A$:

$$\int f \cdot g \, dm = 0, \text{ so ist } g|_{\text{supp } m} = 0 .$$

Beweis :

Es bezeichne stets $|m|$ die Variation eines Maßes m .

Sei $\int f \cdot g \, dm = 0$ für alle $f \in A$.

Nach DINCULEANU [7] p.171 Theorem 3 ist

$$\int f \cdot g \, dm = \int f \, d(g \cdot m) \text{ und somit } g \cdot m = 0, \text{ also auch } |g \cdot m| = 0 .$$

Nach DINCULEANU [7] p.172 Corollary 1 ist

$$|g \cdot m| = |g| \cdot |m| \text{ und daher } \int_S |g| \, d|m| = 0 \text{ für alle meßbaren Mengen } S .$$

$$\text{Also ist } |g|_{\text{supp } m_x} = 0 .$$

2.24 Satz :

Sei X ein kompakter topologischer Raum, A ein dichter Teilraum von $C(X, E)$ mit $A \cdot |S| \subset A$ und T punktweise dominiert .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) $|TA+E(TA)| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (iii) T ist streng desintegrierbar .
- (iv) T ist lokal .

Beweis :

Sei T averaging, $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$ und $x \in X$ beliebig .

Es folgt $|TA+E(TA)| \subset S_{\mathbb{R}}$ und daraus nach Lemma 2.23 für alle Funktionen $g \in TA+E(TA)$, daß $|g| \big|_{\text{supp } m_x} = 0$ für ein Darstellungsmaß m_x von T_x mit den Eigenschaften von Satz 2.3 .

Also ist $\text{supp } m_x \subset [x]$, d.h. T streng desintegrierbar .

Jeder streng desintegrierbare Operator ist lokal und jeder lokale bildhomogene Operator ist averaging und erfüllt $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$, da $A \cdot |S| \subset A$ gilt .

Mit den bekannten Beziehungen zwischen abstrakter und topologischer Integration (s. Anhang A) läßt sich dieser Satz auf abstrakte Grundräume verallgemeinern.

Für die Definition der Betragsstabilität wird auf Anhang A verwiesen (Definition 1) .

2.25 Satz :

Sei A ein betragsstabiler Vektorraum beschränkter Funktionen mit $A \cdot |S| \subset A$, der eine konstante Funktion enthält, und T punktweise dominiert .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) $|TA+E(TA)| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (iii) T ist streng desintegrierbar .
- (iv) T ist lokal .

Beweis :

Nach Anhang A Satz 8 existiert ein kompakter topologischer Raum X' , in dem X dicht liegt .

Sei $D := |A| - |A|$.

Für die Mengen A' und D' aller Fortsetzungen von Funktionen aus A bzw. D ist A' dicht in $C(X', E)$ und D' dicht in $C(X')$.

Sei $x \in X$.

Zunächst wird die Existenz eines Darstellungsmaßes für T_x gezeigt .

Seien $I_x : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein positives $\tilde{G}$ -stetiges lineares Funktional mit $T_x f \leq I_x(|f|)$ für alle $f \in A$, $T'_x : A' \rightarrow E$ der durch $T'_x(f') := T_x(f'|_X)$ induzierte Operator auf A' und $I'_x : D' \rightarrow \mathbb{R}$ das durch I_x induzierte positive lineare Funktional mit $\|T'_x(f')\| \leq I'_x(|f'|)$ für $f' \in A'$. Da somit T'_x dominiert ist, existiert ein reguläres Borelmaß m'_x auf X' mit endlicher Variation $|m'_x|$, das T'_x darstellt .

Sei X mit der von A , und, da A betragsstabil ist, auch von D erzeugten $\tilde{G}$ -Algebra Σ versehen .

Es bezeichne μ_x bzw. μ'_x das zu I_x bzw. I'_x gehörigen Maß auf Σ bzw. $\Sigma' = \Sigma(X', D', I'_x)$.

Nach Anhang A existiert für alle Mengen $S \in \Sigma$ eine Menge $S' \in \Sigma'$ mit $S = S' \cap X$, und für alle Mengen $S \in \Sigma$, $S' \in \Sigma'$ mit $S = S' \cap X$ ist $\mu_x(S) = \mu'_x(S')$.

Durch die Vorschrift

$m_x(S) := m'_x(S')$, wobei $S \in \Sigma$, $S' \in \Sigma'$ mit $S = S' \cap X$, wird ein Maß von m_x auf Σ definiert, das T_x darstellt . Es bleibt zu zeigen, daß m_x eindeutig definiert ist .

Seien $S_1, S_2 \in \Sigma'$ mit $S_1 \subset S_2$ und $S = S_1 \cap X = S_2 \cap X$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|m'_x(S_2) - m'_x(S_1)\| = \|m'_x(S_2 \setminus S_1)\| \leq \mu'_x(S_2 \setminus S_1) = \\ &= \mu_x(\emptyset) = 0 . \end{aligned}$$

Also ist $m'_x(S_1) = m'_x(S_2)$ und m_x eindeutig .

Nun wird die Äquivalenz der Aussagen bewiesen .

Sei T averaging und $|S| \subset S_R$ und damit $|TA + E(TA)| \subset S_R$.

Aus $|TA + E(TA)| \subset S_R$ folgt für die zu A' und T' definierte Menge S'_R , daß $|T'A' + E(TA)| \subset S'_R$.

Nach Lemma 2.23 (vgl. den Beweis von Satz 2.24) ist $\text{supp } m'_x \subset [x]'$, wobei $[x]'$ die T' -Klasse von x bezeichnet .

Sei $f \in A$ mit $\{f \neq 0\} \cap [x] \neq \emptyset$ und $f' \in A'$ mit $f'|_X = f$.

Nach Anhang A existiert für

$\tilde{g}' := 1_{\{f' \neq 0\} \cap [x]'}$ eine Funktion $\tilde{g}' \in \mathcal{L}^1$ (vgl. Anhang A) mit $0 \leq \tilde{g}' \leq g'$, die sich nur um eine $\mathcal{L}^1$ -Nullfunktion unterscheidet . Es ist $\tilde{g}'$ eine Fortsetzung der Nullfunktion über X und somit folgt :

$$|m'_x|(\{f' \neq 0\} \cap [x]') \leq \int \tilde{g}' dI'_x = \int g' dI'_x = 0 .$$

Da $\text{supp } m'_x \subset [x]'$, folgt

$\{f' \neq 0\} = (\{f' \neq 0\} \cap (X \setminus [x]')) \cup (\{f' \neq 0\} \cap [x]')$ ist eine m'_x -Nullmenge und somit $\{f \neq 0\}$ eine m_x -Nullmenge.

Da $x \in X$ beliebig gewählt war, ist T_x streng desintegrierbar .

Auch mit den Methoden dieses Paragraphen läßt sich ein Ergebnis vom Typ des Satzes von KELLEY 1.13 gewinnen .

2.26 Definition :

Enthalte E eine Eins und A die Beträge der Funktionen .

Der Operator besitzt Eigenschaft (P), wenn für alle nichtnegativen reellwertigen Funktionen $f_1, f_2 \in A$ mit $f_1 \leq f_2$ gilt :

$$|Tf_1| \leq |Tf_2| .$$

2.27 Satz :

Sei X kompakt, E mit Eins 1 und A ein abgeschlossener Teilraum von $C(X, E)$ mit $|A| \subset A$ und $1 \in A$.

Der Operator T besitze Eigenschaft (P) .

Sei $\|T\| = 1$ und $T^2 = T$.

Die Menge R aller reellwertigen Funktionen von TA trenne die Punkte von X/T .

Dann ist T genau dann averaging, wenn TA eine Algebra ist.

Beweis :

Ist T averaging, so ist TA eine Algebra.

Sei TA eine Algebra.

Da T stetig und somit TA abgeschlossen ist, ist R eine abgeschlossene punkt trennende Teilalgebra von $C(X/T)$, also gleich $C(X/T)$.

Seien nun $x \in X$ beliebig und m_x das reguläre Borelmaß mit endlicher Variation, das T_x darstellt.

Es genügt zu zeigen, daß $\text{supp } m_x \subset [x]$.

Nimmt man an, es existiert $y \in \text{supp } m_x \setminus [x]$, so gibt es eine Urysohnfunktion

$h \in C(X/T)$ mit $h([x]) = 0$, $h([y]) = 1$ und $0 \leq h \leq 1$.

Da T Eigenschaft (P) erfüllt, gilt für alle meßbaren Teilmengen der offenen Umgebung $h^{-1}((\frac{1}{2}, 2))$ von y in X :

$$\begin{aligned} \|m_x(S)\| &= \left\| \int_S 1_S \, dm_x \right\| \leq 2 \left\| \int h \, dm_x \right\| = 2 \| (Th)(x) \| = \\ &= 2 \| h(x) \| = 0. \end{aligned}$$

Somit liegt y nicht in $\text{supp } m_x$ im Widerspruch zur Annahme.

Die Vermutung, averaging Operatoren als durch Punktabbildungen des Grundraumes induziert charakterisieren zu können, erweist sich als wenig fruchtbar.

2.28 Bemerkung :

Seien X eine beliebige Menge, die mindestens zwei Punkte enthält, $s : X \rightarrow X$ eine Abbildung und A ein punkt trennender Vektorraum reellwertiger Funktionen auf X , der mit $f \in A$ auch $f' := f \circ s$ und $f \cdot f'$ enthält.

Sei $T : A \rightarrow A$ die durch s induzierte Abbildung,
d.h. $Tf = f \circ s$ für alle $f \in A$.

Dann ist T genau dann averaging, wenn $s^2 = s$ gilt.

Beweis :

Ist $s^2 = s$, so ist T offensichtlich averaging.

Die umgekehrte Richtung wird indirekt gezeigt.

Seien $s^2 \neq s$, $y \in s(X)$ mit $s(y) \neq y$, $x \in s^{-1}(y)$ und
 $f \in A$ mit $f(y) = 1$ und $f(s(y)) \neq 1$.

Es folgt : $T(f \circ Tf)(x) = (f \circ Tf)(y) = (f \circ s)(y) \neq 1$ und
 $(Tf)(x) \cdot (Tf)(x) = 1$.

Also ist T nicht averaging.

b) Averaging Homomorphismen

Die wichtigsten der in Teil a) für Endomorphismen gewonnenen
Ergebnisse sollen auf Homomorphismen übertragen werden.

In diesem Abschnitt seien stets (unter den Generalvoraus-
setzungen von § 1) Y eine weitere nichtleere Menge,

C ein Raum von Funktionen auf Y mit Werten in E ,

B ein Teilraum von A mit $A \cdot B \subset A$ und $A \cdot E(B) \subset A$, und

$T : A \rightarrow C$ sei ein linearer B -homogener Operator.

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß für alle $y \in Y$ eine Funktion
 $f \in A$ mit $(Tf)(y) \neq 0$ existiert.

Es wird auf die Definitionen von §1 b) verwiesen.

2.29 Definition (vgl. Definition 2.1) :

Für alle $y \in Y$ sei $T_y : A \rightarrow E$ die durch $T_y f := (Tf)(y)$
für $f \in A$ definierte Abbildung.

T heißt punktweise dominiert, falls T_y für alle $y \in Y$
dominiert ist.

T heißt streng desintegrierbar zu B , falls für alle
 $y \in Y$ ein Maß m_y auf X mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ existiert,
das T_y darstellt derart, daß für alle
 $f \in A$ mit $\{f \neq 0\} \cap [y] = \emptyset$ gilt :

Ist S eine meßbare Menge mit $S \subset \{f \neq 0\}$, so ist

$$m_y(S) = 0.$$

Sei X ein kompakter topologischer Raum und Σ die Borelsche $\mathcal{G}$ -Algebra.

T besitzt Eigenschaft (D1) zu B , falls für alle $y \in Y$ ein Maß m_y auf Σ mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ existiert, so daß für alle $f \in A$ gilt :

$$(Tf)(y) = \int_{[y]} f dm_y$$

und Eigenschaft (D2) zu B , falls für alle $y \in Y$ ein Maß m_y auf Σ mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ existiert, das T_y darstellt, mit

$$\text{supp } m_y \subset [y].$$

Auf Beweise, die analog zum Endomorphismenfall verlaufen, wird nicht gesondert verwiesen.

2.30 Lemma (vgl. Lemma 2.4) :

Seien X kompakt, $A = C(X, E)$ und T punktweise dominiert.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist lokal zu B , und alle T -Klassen zu B sind nichtleer.
- (ii) T ist streng deintegrierbar zu B .
- (iii) T besitzt Eigenschaft (D1) zu B .
- (iv) T besitzt Eigenschaft (D2) zu B .

MARK verallgemeinerte den Satz von KELLEY 2.11 auf Homomorphismen.

2.31 Satz (MARK [24] S.8, Satz 1.6) :

Seien X und Y kompakt, $A = C(X)$, $C = C(Y)$, B eine abgeschlossene Teilalgebra von A und $T : A \rightarrow C$ linear und stetig.

a) Wenn T averaging zu B ist, dann wird durch

$$y \mapsto [y] \text{ eine Abbildung } K : Y \rightarrow X/B$$

definiert, so daß für alle $y \in Y$ gilt :

$$\text{supp } T_y \subset K(y).$$

- b) Wenn es eine Abbildung $K : Y \rightarrow X/B$ gibt, so daß für alle $y \in Y$ gilt : $\text{supp } T_y \subset K(y)$, und wenn aus $K(y) \neq \emptyset$ folgt $(T1_X)(y) = 1$, dann ist T averaging zu B .

2.32 Korollar zu Satz 1.54 (vgl. Korollar 2.12) :

Seien X kompakt, A ein dichter Teilraum von $C(X, E)$ mit $A \cdot |S| \subset A$ und T beschränkt .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging, alle T -Klassen zu B sind nichtleer und $|S| \in S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) T ist streng desintegrierbar .

2.33 Definition (vgl. Definition 2.14) :

Seien X kompakt, $A = C(X, E)$ und T punktweise dominiert . Der Operator T besitzt Eigenschaft (N) zu B, falls für alle $y \in Y$ ein Borelmaß m_y auf X mit Werten in $\mathcal{L}(E, E)$ existiert, das T_y darstellt, so daß für alle $g \in B$ gilt :
 Aus $\int f \cdot (g - (Tg)(y)) \, dm_y = 0$ für alle $f \in A$ folgt
 $(g - (Tg)(y))|_{\text{supp } m_y} = 0$.

Aus dem folgenden Satz kann man sofort den Satz von MARK gewinnen .

2.34 Satz (vgl. Satz 2.15) :

Seien X kompakt, A ein dichter Teilraum von $C(X, E)$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging zu B und besitzt Eigenschaft (N) zu B .
- (ii) T ist streng desintegrierbar zu B .
 und falls A und C Algebren mit $E(B) \subset A$ sind
- (iii) (A, C) ist T -zerlegbar zu B und T besitzt Eigenschaft (N) zu B .

2.35 Bemerkung :

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.31 sei
 $K : Y \rightarrow X/B$ eine Abbildung derart, daß für alle
 $y \in Y$ gilt : $\text{supp } T_y \subset K(y)$ und aus
 $K(y) \neq \emptyset$ folgt $(T1_X)(y) = 1$.
Dann ist $K(y) = [y]_T$ für alle $y \in Y$.

Beweis :

Es wurde o.B.d.A. vorausgesetzt, daß $T_y \neq 0$ für alle
 $y \in Y$. Also ist $\emptyset \neq \text{supp } T_y \subset K(y)$.
Für alle Funktionen $g \in B$ ist $g|_{K(y)}$ konstant .
Da $\text{supp } T_y \subset K(y)$ für alle $y \in Y$ und $(T1_X)(y) = 1$ ist,
folgt : $g|_{K(y)} \equiv (Tg)(y)$, d.h. $K(y) = [y]$.

2.36 Definition (vgl. Definition 2.17) :

Es enthalte E ein Einselement 1 .

Der Operator T besitzt Eigenschaft (I) zu B, wenn für
alle Funktionen $g \in B$ und alle $x \in X$ und $y \in Y$ mit
 $g(x) \neq (Tg)(y)$ das Element $(g(x) - (Tg)(y))$ von E ein Links-
Inverses e in E besitzt, d.h. $e \cdot (g(x) - (Tg)(y)) = 1$.

2.37 Lemma (vgl. Lemma 2.18) :

Seien X kompakt, $A = C(X, E)$ und E enthalte eine Eins .
Ist der Operator T punktweise dominiert und besitzt
Eigenschaft (I) zu B , so besitzt er Eigenschaft (N)
zu B .

2.38 Satz (vgl. Satz 2.25) :

Sei A ein betragstabiler Vektorraum beschränkter
Funktionen mit $A \cdot |S| \subset A$, der eine konstante Funktion
enthält, und T punktweise dominiert.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist averaging, alle T -Klassen zu B sind
nichtleer und $|S| \subset S_{\mathbb{R}}$.
- (ii) Alle T -Klassen zu B sind nichtleer und $|B+E(B)| \subset B$.
- (iii) T ist streng desintegrierbar .
- (iv) Alle T -Klassen zu B sind nichtleer, und T ist lokal .

Kapitel II

Averaging Operatoren und bedingte Erwartungen auf L^p -Räumen vektorwertiger Funktionen

§ 3 Charakterisierung von averaging Operatoren als bedingte Erwartungen und durch Einkreisbarkeit

Eine wichtige Rolle spielen in Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie die bedingten Erwartungen, die bekanntermaßen die Averaging-Gleichung erfüllen. Umgekehrt wurden averaging Operatoren auf Räumen reellwertiger integrierbarer Funktionen von MOY [25], DINCULEANU und RAO [9] u.a. als bedingte Erwartungen charakterisiert.

Zur Verallgemeinerung auf den vektorwertigen Fall wird die von DINCULEANU [8] entwickelte Theorie der bedingten Erwartungen auf L^p -Räumen von Funktionen mit Werten in einem Banachraum benötigt, die (ohne Beweis) zunächst kurz dargelegt wird.

In diesem Paragraphen sei E ein Banachraum, falls multiplikative Struktur benötigt wird, eine beliebige Banachalgebra, und (X, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum in folgendem Sinne, Λ ein Teil- δ -Ring, der alle Nullmengen von Σ enthält.

3.1 Definition und Bemerkungen :

Es sei X eine nichtleere Menge.

Ein System Σ von Teilmengen von X heißt ein δ -Ring, falls gilt :

- a) $S_1 \cup S_2 \in \Sigma$ für alle $S_1, S_2 \in \Sigma$.
- b) $S_1 \setminus S_2 \in \Sigma$ für alle $S_1, S_2 \in \Sigma$.
- c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \Sigma$ für alle Folgen $(S_n) \subset \Sigma$.

Weiter sei μ ein positives endliches reellwertiges Maß auf den δ -Ring Σ .

Dann heißt das Tripel (X, Σ, μ) ein Maßraum .

Der Maßraum (X, Σ, μ) sei vollständig .

Eine Teilmenge S' von X heißt Σ -meßbar, falls

$S \cap S' \in \Sigma$ für alle $S \in \Sigma$. Σ_{loc} bezeichnet die Gesamtheit dieser Mengen und $\tilde{\Sigma}_{loc}$ die von Σ_{loc} erzeugte

G-Algebra . Durch $\mu^*(S') := \sup \{ \mu(S), S \in \Sigma, S \subset S' \}$ ($S' \in \Sigma_{loc}$), das äußere Maß von S' , läßt sich μ auf Σ_{loc} fortsetzen .

Die Mengen $N \in \Sigma_{loc}$ mit $\mu^*(N) = 0$ heißen Σ -Nullmengen oder μ -Nullmengen .

Eine Funktion $f : X \rightarrow E$ heißt Σ -Nullfunktion, falls die Menge $\{f \neq 0\}$ eine Σ -Nullmenge ist und Σ -meßbar, falls

für jede Menge $S \in \Sigma$ eine Folge (f_n) von E-wertigen Σ -Treppenfunktionen existiert, die auf S außerhalb einer Σ -Nullmenge punktweise gegen f konvergiert .

Es bezeichne $S_E(\Sigma)$ den Raum aller Σ -Treppenfunktionen

$f : X \rightarrow E$. Für $1 \leq p < \infty$ bezeichnet $\mathcal{L}_E^p(\Sigma)$ den Raum aller Funktionen $f : X \rightarrow E$, die Σ -meßbar sind, deren Träger in Σ_g liegt und die Σ -fast überall Limes einer Fundamentalfolge $(f_n) \subset S_E(\Sigma)$ bezüglich des Mittels

der Ordnung p sind (d.h. $(\int |f_n - f_m|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$), und

$\mathcal{L}_E^\infty(\Sigma)$ den Raum aller Funktionen $f : X \rightarrow E$, die Σ -meßbar und außerhalb von Σ -Nullmengen beschränkt

sind. Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichnet $L_E^p(\Sigma)$ den zugehörigen Raum von Äquivalenzklassen modulo Σ -Nullfunktionen .

Wenn $\mathcal{L}$ eine Teilfamilie von Σ_{loc} ist, so heißt die Funktion $f : X \rightarrow E$ $\mathcal{L}$ -lokal Σ -integrierbar, falls

$f \cdot 1_S$ in $\mathcal{L}_E^1(\Sigma)$ für alle $S \in \mathcal{L}$ liegt .

Für jede Menge $S \in \Sigma_{loc}$ ist $\tilde{S}$ die Klasse aller Mengen $S' \in \Sigma_{loc}$, so daß $S \Delta S'$ eine Σ -Nullmenge ist und $\tilde{\Sigma}_{loc}$ bezeichnet die Menge aller dieser Klassen .

Durch $\tilde{S}_1 \subset \tilde{S}_2 : \Leftrightarrow S_1 \setminus S_2$ ist eine Nullmenge ($S_1, S_2 \in \Sigma_{loc}$), ist eine Ordnungsrelation in $\tilde{\Sigma}_{loc}$ definiert .

Für jedes $S \in \Sigma_{loc}$ gilt : $\tilde{S} = \sup \{ \tilde{S}' : S' \in \Sigma, S' \subset S \}$.

Der Maßraum (X, Σ, μ) heißt lokalisierbar, falls für jede Teilfamilie $\mathcal{L}$ von Σ_{loc} ihr Supremum in Σ_{loc} existiert .

3.2 Bemerkung :

Sei $\mathcal{A}$ ein Teil- Σ -Ring von Σ_{loc} , für den eine Menge $S' \in \Sigma_{loc}$ mit $\tilde{S}' = \sup \{ \tilde{S} : S \in \mathcal{A} \}$ existiert .

- a) Ist $S' \in \Sigma_{loc}$ eine Teilmenge von S' , so ist $\tilde{S}' = \sup \{ \tilde{S} \cap \tilde{S} : S \in \mathcal{A} \}$.
- b) Eine Funktion $f : X \rightarrow E$, die außerhalb S' verschwindet, ist Σ -meßbar (bzw. eine Σ -Nullfunktion) genau dann, wenn für jede Menge $S \in \mathcal{A}$ die Funktion $f \cdot 1_S$ Σ -meßbar (bzw. eine Σ -Nullfunktion) ist .
- c) Eine Teilmenge S'' von S' ist Σ -meßbar (bzw. eine Σ -Nullmenge) genau dann, wenn für jede Menge $S \in \mathcal{A}$ die Menge $S'' \cap S$ Σ -meßbar (bzw. eine Σ -Nullmenge) ist .

Der Beweis der nachfolgenden Lemmata 3.4 und 3.6 ergibt sich leicht mit Hilfe einiger Sätze von DINCULEANU [7] .

3.3 Definition :

Eine Funktion $f : X \rightarrow E$ heißt μ -meßbar, wenn

- a) für jede offene Teilmenge O von E die Menge $f^{-1}(O)$ in Σ_{loc} liegt,
- b) es für jede Menge $S \in \Sigma_{loc}$ mit endlichem Maß eine Teilmenge N von S mit verschwindendem Maß und eine abzählbare Teilmenge H von E gibt, so daß gilt:

$$f(S \setminus N) \subset \bar{H} .$$

3.4 Lemma :

Eine Funktion auf X mit Werten in E ist genau dann Σ -meßbar, wenn sie μ -meßbar ist .

3.5 Definition :

Für $1 < p < \infty$ bezeichnet $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ den Raum aller Funktionen $f : X \rightarrow E$, die μ -meßbar sind und für die $|f|^p$ in $\mathcal{L}^1(\Sigma)$ liegt .

3.6 Lemma :

Es sei $1 < p < \infty$.

Dann ist $\mathcal{L}_E^p(\Sigma) = \mathcal{L}_E^p(\mu)$.

Die folgenden Zusammenhänge (DINCULEANU [8] p.352) werden in diesem Kapitel stillschweigend als bekannt vorausgesetzt .

3.7 Bemerkung :

Sei $1 \leq p < \infty$.

Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ ein vollständiger Maßraum .

Es gilt : $\mathcal{A}_\sigma \subset \Sigma_\sigma$, und jede Σ -Nullmenge ist $\mathcal{A}$ -Nullmenge.

Es ist $\mathcal{L}_E^p(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}_E^p(\Sigma)$ und

$$\int f d(\mu|_{\mathcal{A}}) = \int f d\mu \text{ für alle } f \in \mathcal{L}_E^p(\mathcal{A}) .$$

Die p -Halbnormen stimmen überein .

Jede Σ -Nullfunktion ist $\mathcal{A}$ -Nullfunktion .

Es sei $\sup \{ \tilde{S} : S \in \mathcal{A} \} = \tilde{X}$ in $\tilde{\Sigma}_{loc}$.

Dann folgt : $\mathcal{A}_{loc} \subset \Sigma_{loc}$, die Σ -Nullmengen stimmen mit den $\mathcal{A}$ -Nullmengen überein, die Σ -Nullfunktionen stimmen mit den $\mathcal{A}$ -Nullfunktionen überein und $\mathcal{L}_E^\infty(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}_E^\infty(\Sigma)$.

Nun wenden wir uns Definition und Existenz der bedingten Erwartung zu (DINCULEANU [8] p.352-355) .

3.8 Definition :

Sei $f : X \rightarrow E$ eine $\mathcal{A}$ -lokal Σ -integrierbare Funktion .

Eine Funktion $g : X \rightarrow E$ heißt bedingte Erwartung von f bezüglich $\mathcal{A}$, in Zeichen $E_{\mathcal{A}}f$ oder $E[f|\mathcal{A}]$, falls gilt :

- a) g ist $\mathcal{A}$ -meßbar .
- b) g ist $\mathcal{A}$ -lokal Σ -integrierbar und

$$\int_S g d\mu = \int_S f d\mu \text{ für alle } S \in \mathcal{A} .$$
- c) Für den Träger G von g gilt :

$$\sup \{ \tilde{S} : S \in \mathcal{A} , S \subset G \} = \tilde{G} \text{ in } \Sigma_{loc} .$$

3.9 Bemerkung :

Sei $f : X \rightarrow E$ eine $\mathcal{A}$ -lokal Σ -integrierbare Funktion, für die $E_{\mathcal{A}}f$ existiert . Dann gilt :

- (i) Der Träger von $E_{\mathcal{A}}f$ liegt in $\mathcal{A}_{loc} \cap \Sigma_{loc}$.
- (ii) Die Funktion $E_{\mathcal{A}}f$ ist Σ -meßbar und modulo Σ -Nullmengen eindeutig bestimmt .
- (iii) Ist Bedingung (c) nicht erfüllt, so können Funktionen existieren, die (a) und (b) erfüllen, sich jedoch auf Mengen unterscheiden, die keine Nullmengen sind .
- (iv) Falls $\tilde{S}^* = \sup \{ \tilde{S} : S \in \mathcal{A} \}$ in $\tilde{\Sigma}_{loc}$ existiert, ist Bedingung (c) äquivalent zu $\tilde{G} \subset \tilde{S}^*$, insbesondere, falls $\sup \{ \tilde{S} : S \in \mathcal{A} \} = \tilde{X}$, ist (c) überflüssig .

3.10 Lemma :

Es sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathcal{L}_E^p(\Sigma)$.

Dann existiert die Funktion $E_{\mathcal{A}}f$, und ihr Träger liegt in $\mathcal{A}_G$.

Weiter ist $E_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_E^p(\Sigma) = \mathcal{L}_E^p(\mathcal{A})$.

3.11 Lemma :

Der Maßraum (X, Σ, μ) sei lokalisierbar .

Dann existiert $E_{\mathcal{A}}f$ für jede Funktion $f \in \mathcal{L}_E^\infty(\Sigma)$.

Weiter ist $E_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_E^\infty(\Sigma) = \mathcal{L}_E^\infty(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_E^\infty(\Sigma)$.

3.12 Definition :

Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}_E^p(\Sigma)$ und $\tilde{f} \in L_E^p(\Sigma)$ die Klasse von f . Existiert $E_{\mathcal{A}}f$, so heißt die Klasse $\widetilde{E_{\mathcal{A}}f}$ von $E_{\mathcal{A}}f$ in $L_E^p(\Sigma)$ die bedingte Erwartung von $\tilde{f}$, kurz $E_{\mathcal{A}}\tilde{f}$. Sei E eine Banach-Algebra.

Ein Operator $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ heißt averaging, wenn für alle Funktionen $f, g \in L_E^p(\Sigma)$, für die entweder f oder Tg beschränkt ist, gilt :

$$T(f \cdot Tg) = Tf \cdot Tg.$$

Es ist bekannt, daß jede bedingte Erwartung averaging ist.

3.13 Lemma (DINCULEANU [8] p.361, Position 24) :

Sind f und g Funktionen, für die f und $f \cdot g$ $\mathcal{A}$ -lokal Σ -integrierbar sind, so existiert $E_{\mathcal{A}}f$, und falls g $\mathcal{A}$ -meßbar ist, existiert auch $E_{\mathcal{A}}(f \cdot g)$, und es ist $E_{\mathcal{A}}(f \cdot g) = E_{\mathcal{A}}f \cdot g$.

Die Umkehrung wurde u.a. von DINCULEANU und RAO für Räume reellwertiger integrierbarer Funktionen bewiesen.

3.14 Satz (DINCULEANU/RAO [9] p.375, Theorem 8) :

Es sei $1 \leq p < \infty$ eine reelle Zahl und

$T : L^p(\Sigma) \rightarrow L^p(\Sigma)$ eine kontrahierende averaging

Projektion. Dann ist die Klasse $\mathcal{A}$ aller Mengen S

mit $T(\tilde{1}_S) = \tilde{1}_S$ ein δ -Ring und T die bedingte Erwartung bezüglich $\mathcal{A}$.

DINCULEANU und RAO folgerten daraus eine Charakterisierung einer Klasse von Projektionen auf Räumen Banachraum-wertiger integrierbarer Funktionen, die eine Verallgemeinerung von averaging Operatoren auf Räumen reellwertiger integrierbarer Funktionen bilden, als bedingte Erwartungen.

3.15 Korollar (DINCULEANU/RAC [9] p.380 Corollary 10) :

Sei $1 \leq p < \infty$ eine reelle Zahl und $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ eine kontrahierende Projektion mit der folgenden Eigenschaft :

Für jede Funktion $h \in L^p(\Sigma)$ existiert eine Funktion $P_h \in L^p(\Sigma)$, so daß gilt :

a) $T(h \cdot e) = P_h \cdot e$ für alle $e \in E$.

b) $T(h \cdot Tf) = P_h \cdot Tf$ für alle $f \in L_E^p(\Sigma) \cap L_E^\infty(\Sigma)$.

Dann existiert ein Teil- σ -Ring I von Σ , der alle Nullmengen von Σ enthält und für den T die bedingte Erwartung ist .

3.16 Bemerkung :

Die Umkehrung von Korollar 3.15 ist richtig.

Beweis :

Man wähle für $h \in L^p(\Sigma)$ die Funktion $P_h = E_I(h)$.

Weiter läßt sich eine Charakterisierung von averaging Projektionen auf Räumen Banachalgebra-wertiger integrierbarer Funktionen als bedingte Erwartungen gewinnen . Dazu werden einige Begriffe eingeführt .

3.17 Definition :

Seien E eine Banachalgebra mit Eins, $1 \leq p < \infty$ eine reelle Zahl und $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ ein Operator .

Der Operator T heißt E-homogen, falls für alle $f \in L_E^p(\Sigma)$ und alle $e \in E$ gilt :

$$T(e \cdot f) = e \cdot Tf .$$

Der Operator T besitzt Eigenschaft (P1), falls für alle nichtnegativen Funktionen $f, g \in L^p(\Sigma)$ gilt :

$$|Tf+Tg| = |Tf| + |Tg| .$$

3.18 Satz :

Seien E eine Banachalgebra mit Eins, $1 \leq p < \infty$ eine reelle Zahl und $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ ein Operator .
Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) T ist eine lineare E -homogene kontrahierende averaging Projektion, die Eigenschaft (P1) erfüllt und $|TL_E^p(\Sigma)| \subset TL_E^p(\Sigma)$.
- (ii) Es existiert ein Teil- δ -Ring Λ von Σ , der alle Nullmengen von Σ enthält und für den T die bedingte Erwartung ist .

Beweis :

Jede bedingte Erwartung erfüllt nach DINCULEANU [8] pp.357 die erste Aussage .

Nun sei T eine lineare E -homogene kontrahierende Projektion mit Eigenschaft (P1) .

Es bleibt zu zeigen, daß T eine bedingte Erwartung ist.

Durch $T_0 f := |T(f^+)| - |T(f^-)|$ für $f \in L^p(\Sigma)$ wird ein Operator $T_0 : L^p(\Sigma) \rightarrow L^p(\Sigma)$ definiert.

Wir beweisen zunächst, daß T_0 die Voraussetzungen von Satz 3.14 erfüllt .

Da für alle $c \in \mathbb{R}$ und $f \in L^p(\Sigma)$

$$\begin{aligned} T_0(c \cdot f) &= |T((c \cdot f)^+)| - |T((c \cdot f)^-)| = c \cdot (|T(f^+)| - |T(f^-)|) = \\ &= c \cdot T_0 f \text{ gilt, ist } T_0 \text{ homogen .} \end{aligned}$$

Weil für alle $f, g \in L^p(\Sigma)$ eine nichtnegative Funktion

$h \in L^p(\Sigma)$ mit $(f+g)^+ + h = f^+ + g^+$ und $(f+g)^- + h = f^- + g^-$

existiert und T Eigenschaft (P1) besitzt, gilt :

$$\begin{aligned} T_0 f + T_0 g &= |T(f^+)| - |T(f^-)| + |T(g^+)| - |T(g^-)| = \\ &= |T(f^+ + g^+)| - |T(f^- + g^-)| = |T(f+g)^+| + |Th| - \\ &- |T((f+g)^-)| - |Th| = T_0(f+g), \text{ d.h. } T_0 \text{ ist additiv .} \end{aligned}$$

Da T_0 linear ist, $|TL_E^p(\Sigma)| \subset TL_E^p(\Sigma)$ gilt, und für alle nichtnegativen Funktionen $f, g \in L^p(\Sigma)$, wobei f oder Tg beschränkt ist, gilt :

$$\begin{aligned} T_0(f \cdot T_0(g)) &= T_0(f \cdot |T(g)|) = |T(f \cdot |T(g)|)| = \\ &= |T(f)| \cdot |T(g)| = T_0(f) \cdot T_0(g), \end{aligned}$$

ist T_0 averaging .

Da $|TL_E^P(\Sigma)| \subset TL_E^P(\Sigma)$ und T eine Projektion ist, ist auch T_0 eine.

Für $f \in L^P(\Sigma)$ mit $\|f\|_P \leq 1$ gilt :

$$\|T_0 f\|_P = \| |T(f^+)| - |T(f^-)| \|_P \leq \|T(f^+ + f^-)\|_P = \|T(|f|)\|_P \leq 1.$$

Also ist T_0 kontrahierend .

Nach Satz 3.14 ist $\mathcal{A} = \{S \in \Sigma : T_0 \tilde{1}_S = \tilde{1}_S\}$ ein δ -Ring und T_0 die bedingte Erwartung bezüglich $\mathcal{A}$.

Da T E -homogen ist, folgt die Aussage für alle E -wertigen Σ -Treppenfunktionen und somit allgemein .

Ein klassischer Satz ist der folgende .

3.19 Satz (MOY [25] p.60, Theorem 2.1) :

Seien (X, Σ, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum, p und q Zahlen mit $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und

$T : L^P(\Sigma) \rightarrow L^P(\Sigma)$ ein stetiger linearer averaging Operator, der beschränkte Funktionen auf beschränkte abbildet . Dann existieren eine Teil- σ -Algebra $\mathcal{A}$ von Σ und eine Funktion $g \in L^q(\Sigma)$, derart, daß $E_{\mathcal{A}} g$ beschränkt ist und für alle Funktionen $f \in L^P(\Sigma)$ gilt : $Tf = E_{\mathcal{A}}(f \cdot g)$.

Um diesen Satz zu verallgemeinern, bedarf es einiger Vorarbeiten.

Im folgenden seien stets :

(X, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, wobei Σ ein σ -Körper ist, E eine Banach-Algebra mit Eins, $1 \leq p < \infty$ eine reelle Zahl und $T : L_E^P(\Sigma) \rightarrow L_E^P(\Sigma)$ ein linearer E -homogener (bezüglich der $L_E^P(\Sigma)$ -Norm) stetiger averaging Operator, der beschränkte Funktionen auf beschränkte abbildet und Eigenschaft (R) im Sinne der nächsten Definition besitzt.

3.20 Definition :

Der Operator besitzt die Eigenschaft (R), falls

a) für jede offene Kugel O in E und jede Funktion $g \in T(L_E^p(\Sigma))$ eine reellwertige Funktion $g' \in T(L_E^p(\Sigma))$ und eine Borelmenge O' in $\mathbb{R}$ mit $g'^{-1}(O') = g^{-1}(O)$ existieren und

b) eine reelle Zahl r existiert, so daß für alle Mengen $S \in \Sigma$ und alle endlichen Familien

$(S_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \Sigma$ disjunkter Teilmengen von S gilt :

$$\sum_{i=1}^n \|T(1_{S_i})\| d\mu < r .$$

3.21 Bemerkung :

Ist $E = \mathbb{R}$ oder T eine bedingte Erwartung, so erfüllt T Eigenschaft (R) .

Beweis :

Falls $E = \mathbb{R}$, ist nur b) zu zeigen .

Für das durch $m(S) := \int T \tilde{1}_S d\mu$ ($S \in \Sigma$) definierte Maß erhält man z.B. mittels einer Hahn-Zerlegung, daß die zugehörige Variation $|m|$ endlich ist. Daher gilt für

alle Familien $(S_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \Sigma$ disjunkter Mengen

$$\sum_i \int T(\tilde{1}_{S_i}) d\mu \leq |m|(X) .$$

Sei nun $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ die bedingte Erwartung bezüglich eines Teil- δ -Ringes Λ von Σ .

Nach Lemma 3.10 ist $T(L_E^p(\Sigma)) = L_E^p(\Lambda)$ und wir wählen, um

a) zu beweisen, zu jeder offenen Kugel O in E und

zu $g \in L_E^p(\Lambda)$ die Funktion $g' := \tilde{1}_{g^{-1}(O)}$, die nach

Lemma 3.6 in $L_E^p(\Lambda)$ liegt .

Eigenschaft b) folgt, da bedingte Erwartungen auf $L^p(\Sigma)$ positiv sind .

3.22 Lemma :

Für die Menge G aller Funktionen $g \in L_E^p(\Sigma)$ mit
 $T(f \cdot g) = Tf \cdot g$ für alle beschränkten Funktionen
 $f \in L_E^p(\Sigma)$ gilt :
 G ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von
 $L_E^p(\Sigma)$ und für alle beschränkten Funktionen
 $g_1, g_2 \in G$ liegt auch $g_1 \cdot g_2$ in G .

Beweis :

Da T linear ist, ist G ein Vektorraum, und da T stetig
ist, konvergiert für jede beschränkte Funktion
 $f \in L_E^p(\Sigma)$ und jede gegen eine Funktion $g \in L_E^p(\Sigma)$
konvergierende Folge $(g_n) \subset G$ die Folge $(T(f \cdot g_n))$
gegen $T(f \cdot g)$ und die Folge $(Tf \cdot g_n)$ gegen $Tf \cdot g$.
Es folgt : $T(f \cdot g) = Tf \cdot g$, d.h. G ist abgeschlossen .

3.23 Korollar :

Für jede Funktion $f \in L_E^p(\Sigma)$ liegt Tf in G .

3.24 Lemma :

Die Menge $\mathcal{A} = \{S \in \Sigma : \tilde{1}_S \in G\}$ ist ein σ -Körper .

Beweis :

Da die Funktion 1_X in G liegt, gilt $X \in \mathcal{A}$.

Für alle Mengen $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$ ist $1_{S_1 \cap S_2} = 1_{S_1} \cdot 1_{S_2}$,

also $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{A}$, weiter $1_{S_1 \setminus S_2} = 1_{S_1} - 1_{S_1 \cap S_2}$,

also $S_1 \setminus S_2 \in \mathcal{A}$ und $1_{S_1 \cup S_2} = 1_{S_1} + 1_{S_2} - 1_{S_1 \cap S_2}$,

also $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{A}$.

Für eine aufsteigende Folge $(S_n) \subset \mathcal{A}$ und $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$

konvergiert die Folge (1_{S_n}) in $L_E^p(\Sigma)$ gegen 1_S .

Da G abgeschlossen ist, liegt S in $\mathcal{A}$.

3.25 Lemma :

Der Raum M aller $\mathcal{A}$ -meßbaren Funktionen von $L_E^p(\Sigma)$ ist in G enthalten .

Beweis :

Es liegt $S_E(\mathcal{A})$ in G .

Da $X \in \mathcal{A}$, läßt sich jede $\mathcal{A}$ -meßbare Funktion f durch eine Folge $(f_n) \subset S_E(\mathcal{A})$, mit $|f_n| \leq |f|$ fast überall approximieren. Liegt f auch in $L_E^p(\Sigma)$, so konvergiert die Folge in $L_E^p(\Sigma)$ gegen f .

Da G abgeschlossen ist, folgt : $M \subset G$.

3.27 Lemma :

Für jede Funktion $f \in L_E^p(\Sigma)$ ist Tf $\mathcal{A}$ -meßbar .

Beweis :

Es seien $f \in L_E^p(\Sigma)$ und $g = Tf$.

Nach Lemma 3.6 und Definition 3.20 a) genügt es, die Aussage nur für reellwertige Funktionen g zu beweisen . Zunächst sei g beschränkt .

Für jede stetige reellwertige Funktion t auf einem kompakten Intervall, das den Wertebereich von g enthält, existiert nach dem Satz von WEIERSTRASS eine Folge (p_n) von Polynomen, für die $(p_n \circ g)$ gleichmäßig gegen $t \circ g$ konvergiert. Es folgt Konvergenz in $L_E^p(\Sigma)$, und da nach Lemma 3.22 jede Funktion $p_n \circ g$ in G liegt und G abgeschlossen ist, liegt $t \circ g$ in G .

Es sei Σ_g die kleinste Teil- σ -Algebra von Σ , bezüglich derer g meßbar ist. Für jede Menge $S \in \Sigma_g$ existiert eine Folge (t_n) stetiger reellwertiger Funktionen, so daß die Folge $(t_n \circ g)$ in $L_E^p(\Sigma)$ gegen 1_S konvergiert. Da G abgeschlossen ist, liegt 1_S in G , d.h. $S \in \mathcal{A}$. Somit ist g $\mathcal{A}$ -meßbar.

Nun sei g unbeschränkt.

In $E_E(\Sigma)$ existiert eine Folge (f_n) , die in $L_E^p(\Sigma)$ gegen f konvergiert. Nach dem Vorangegangenen ist Tf_n für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A}$ -meßbar. Da T stetig ist, konvergiert die Folge (Tf_n) in $L_E^p(\Sigma)$ gegen $g = Tf$, und somit ist g $\mathcal{A}$ -meßbar.

3.27 Definition :

Sei (X, Σ) ein Meßraum, d.h. X eine Menge und Σ eine σ -Algebra von Teilmengen von X .

Ein Banachraum E besitzt die Radon-Nikodym-Eigenschaft bezüglich (X, Σ) , falls für jedes endliche skalarwertige Maß μ auf (X, Σ) und jedes μ -stetige E -wertige Maß m auf (X, Σ) mit beschränkter Variation eine Funktion $g \in L_E^1(\Sigma)$ existiert, so daß

$$m = g \cdot \mu,$$

d.h. $m(S) = \int_S g d\mu$ für alle $S \in \Sigma$.

3.28 Satz :

Unter den Voraussetzungen von S. 59 u. besitze E die Radon-Nikodym-Eigenschaft.

Dann existieren eine Funktion $g \in L_E^1(\Sigma)$ und eine Teil- σ -Algebra $\mathcal{A}$ von Σ , so daß

$Tf = E_{\mathcal{A}}(f \cdot g)$ für alle beschränkten Funktionen $f \in L_E^p(\Sigma)$ und, falls g wesentlich beschränkt ist, für alle Funktionen $f \in L_E^p(\Sigma)$ gilt.

Beweis :

Man definiert $m(S) := \int T1_S d\mu$ für alle $S \in \Sigma$.

Da T stetig bezüglich der $L_E^p(\Sigma)$ -Norm ist, ist m σ -additiv, also ein Maß auf Σ mit Werten in E .

Für alle Mengen $S \in \Sigma$ und alle endlichen Familien $(S_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \Sigma$ von Teilmengen von S gilt :

$$\sum_{i=1}^n \|m(S_i)\| = \sum \left\| \int T1_{S_i} d\mu \right\| \leq r \quad \text{nach}$$

Definition 3.20 b), d.h. m besitzt endliche Variation.

Da m μ -stetig ist und E die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt, existiert eine Funktion $g \in L_E^1(\Sigma)$ mit $m(S) = \int_S g d\mu$. Da T E -homogen und linear ist, folgt für

$$\text{alle Funktionen } f \in S_E(\Sigma) \quad \int f \cdot g d\mu = \int T f d\mu.$$

Für alle Funktionen $f \in L_E^p(\Sigma)$ existiert eine Folge $(f_n) \subset S_E(\Sigma)$, mit $|f_n| \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Σ -fast überall (und in $L_E^p(\Sigma)$) gegen f konvergiert.

Es sei f oder g beschränkt.

Dann liegt $f \cdot g$ in $L_E^1(\Sigma)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt :
 $|f_n \cdot g| \leq |f \cdot g|$ und die Folge $(f_n \cdot g)$ konvergiert Σ -fast überall gegen $f \cdot g$.

Nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz (DINCULEANU [7] p.136, Theorem 3) folgt :

$$\int f \cdot g d\mu = \lim \int f_n \cdot g d\mu = \lim \int T f_n d\mu = \int T f d\mu.$$

Per definitionem von Λ gilt für alle $S \in \Lambda$

$$\int_S f \cdot g d\mu = \int T(f \cdot 1_S) d\mu = \int_S T f d\mu.$$

Nach Lemma 3.27 ist $T f$ Λ -meßbar.

Damit ist alles gezeigt.

Die Übertragung dieses Satzes auf vektorwertige Maße wurde nicht versucht. Eine direkte Verallgemeinerung ist keinesfalls möglich, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

3.29 Bemerkung :

Seien X ein kompakter separabler metrischer Raum, Σ der Borelsche σ -Körper, E eine Banachalgebra mit Eins und $m : \Sigma \rightarrow E$ ein reguläres Borelmaß mit endlicher Variation.

Weiter sei $T : L^1(X, \Sigma, m) \rightarrow L^1(X, \Sigma, m)$ eine positive lineare, bezüglich der $L^1(X, \Sigma, m)$ -Norm stetige kompakte averaging Projektion, die die Eins auf sich abbildet und deren Bild nur konstante Funktionen enthält.

Dann existieren i.a. kein Teil- σ -Ring Λ von Σ und keine Funktion g , so daß gilt :

Für alle (beschränkten) Funktionen $f \in L^1(X, \Sigma, m)$ ist $T f$ Λ -meßbar und für alle $S \in \Lambda$ $\int_S T f d m = \int_S f \cdot g d m$.

Beweis :

Wir wählen $X = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$, versehen mit der euklidischen Metrik. Der zugehörige Borelsche Σ -Körper Σ ist die Potenzmenge von X .

Weiter sei $E = l_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$ die Banachalgebra aller beschränkten reellen Folgen und für $S \in \Sigma$

$m(S) := (\frac{1}{2^n} \cdot a_S(n))_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $a_S(n) = 1$, falls

$\frac{1}{n} \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ und $a_S(n) = 0$, sonst.

Für beliebige meßbare Mengen S_1, S_2 gilt

$$m(S_1 \cap S_2) = m(S_1) \cdot m(S_2).$$

Durch $Tf \equiv \frac{1}{2} (f(1) + f(2))$ definieren wir eine Projektion $T : L^1(X, \Sigma, m) \rightarrow L^1(X, \Sigma, m)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Nimmt man an, daß ein Teil- σ -Ring $\mathcal{A}$ und eine Funktion g existieren mit $\int Tfdm = \int f \cdot gdm$ für alle $S \in \mathcal{A}$ und $f \in L^1(X, \Sigma, m)$ und, daß Tf $\mathcal{A}$ -meßbar ist, so folgt :

Da die Menge X selbst in $\mathcal{A}$ enthalten ist, ergibt sich $(Tf)(x) = (f \cdot g)(x)$ für alle $f \in L^1(X, \Sigma, m)$, $x \in X$ und, speziell für $f = 1_{\{1\}}$ und $x = \frac{1}{2}$, sogar $\frac{1}{2} = 0$, also ein Widerspruch.

Eine weitere zu überwindende Schwierigkeit wäre der Beweis der Eindeutigkeit der bedingten Erwartung, da die übliche Methode, aus $\int_S f dm = 0$ für alle $S \in \mathcal{A}$ und eine $\mathcal{A}$ -meßbare Funktion f zu schließen : $f = 0$ modulo $\mathcal{A}$, für vektorwertige Maße m nicht mehr anwendbar ist.

Mit Modifizierungen der Methoden des §1 lassen sich weitere Charakterisierungen von averaging Operatoren erreichen.

Zu den nächsten Ergebnissen setzen wir voraus :

Es sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, E eine Banachalgebra mit Eins, $T : L_E^{\infty}(\Sigma) \rightarrow L_E^{\infty}(\Sigma)$ ein beschränkter linearer E -homogener Operator.

Es existiere ein betragsinvariantes Lifting von $L_E^{\infty}(\Sigma)$ im folgenden Sinne :

3.30 Definition :

Eine Abbildung g von $L_E^\infty(\Sigma)$ in den Raum $M_E^\infty(\Sigma)$ aller beschränkten Σ -meßbaren Funktionen $f : X \rightarrow E$ heiße ein Lifting von $L_E^\infty(\Sigma)$, wenn sie folgende Axiome erfüllt :

- (1) Für alle $f \in L_E^\infty(\Sigma)$ ist $\widetilde{g}f = f$.
- (2) Für alle $e \in E$ ist $g(e \cdot 1_X) = e \cdot 1_X$.
- (3) Die Abbildung g ist linear.
- (4) Die Abbildung g ist multiplikativ.

Ein Lifting g heißt betragsinvariant, wenn gilt :

- (5) Für alle Funktionen $f \in L_E^\infty(\Sigma)$ ist $g(|f|) = |gf|$.

3.31 Lemma :

Der Bildraum $TL_E^\infty(\Sigma)$ enthalte alle Konstanten (der Form $(gg)(x)$ mit $x \in X$ und $g \in TL_E^\infty(\Sigma)$).

Der Operator T ist genau dann averaging, wenn eine sublineare Abbildung $p : L_E^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}^X$ mit folgenden Eigenschaften existiert :

- (1) $p(f \cdot g) \leq pf \cdot |g|$ für alle Funktionen $f \in L_E^\infty(\Sigma)$ und $g \in g(TL_E^\infty(\Sigma))$.
- (2) $|g(Tf)| \leq pf$ für alle Funktionen $f \in L_E^\infty(\Sigma)$.

Beweis :

Falls T averaging ist, wird durch $pf := |g(Tf)|$ für $f \in L_E^\infty(\Sigma)$ eine sublineare Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften definiert.

Nun sei umgekehrt $p : L_E^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}^X$ eine sublineare Abbildung mit diesen Eigenschaften.

Für alle $f \in L_E^\infty(\Sigma)$, $g \in g(TL_E^\infty(\Sigma))$ und $x \in X$ gilt :

$$|g(T(f \cdot g)) - g(Tf) \cdot (gg)(x)| = |g(T(f \cdot (g - (gg)(x))))| \leq p(f \cdot (g - (gg)(x))) \leq p(f) \cdot |g - (gg)(x)|.$$

Da $g - (gg)(x) = 0$ ist, folgt :

T ist averaging.

3.32 Bemerkung :

Es ist $\|gf\| = \|gf\|_\infty = \|gf\|_\infty$ für alle $f \in L^\infty_E(\Sigma)$.

Beweis :

Nach Definition 3.30, (1) ist $\|gf\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Ist $f(x) = 1$ für Σ -fast alle $x \in X$ gilt, ist nach (5) $\|(gf)(x)\| = \|g(1)(x)\| \leq \|f\|_\infty = \|gf\|_\infty \leq \|gf\|$ für alle $x \in X$ und somit $\|gf\| = \|gf\|_\infty$.

3.33 Definition :

Der Operator T heißt funktionsbeschränkt, falls für alle Funktionen $f \in L^\infty_E(\Sigma)$ eine Funktion $h_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ existiert derart, daß für alle Funktionen $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \cdot g \in L_E(\Sigma)$ und $\|f \cdot g\| \leq 1$ gilt :

$$|g(T(f \cdot g))| \leq h_f.$$

Sei $R \in L^\infty(\Sigma)$.

Der Operator T heißt einkreisbar durch R , falls für alle Funktionen $f \in L^\infty_E(\Sigma)$ eine Funktion $h_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ existiert derart, daß für alle Funktionen $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \cdot g \in L^\infty_E(\Sigma)$ gilt : $h_f = h_{f \cdot g}$ und für alle Funktionen $g \in R$ mit $|f| \leq |g|$ gilt :

$$|g(Tf)| \leq h_f \cdot |g|$$

und, falls T beschränkt ist, normeinkreisbar durch R , wenn T einkreisbar durch R ist und für alle Funktionen $f \in L^\infty_E(\Sigma)$ gilt :

$$h_f \equiv \|Tf\|.$$

3.34 Satz :

Sei G die von $TL^\infty_E(\Sigma)$ und E erzeugte Algebra.

Für alle Funktionen $f \in L^\infty_E(\Sigma)$ und alle $x \in X$ gelte

(1*) $\text{In}_G(TL^\infty_E(\Sigma) + E)$ existiert eine Folge (g_n) reellwertiger Funktionen mit $|f| \leq |g_n|$, $\frac{f}{g_n} \in L^\infty_E(\Sigma)$ und

$$\inf_n |g_n|(x) = \inf\{|g|(x) : g \in TL^\infty_E(\Sigma) + E, |f| \leq |g|\}.$$

Dann ist T genau dann averaging und funktionsbeschränkt, wenn T einkreisbar durch $|G|$ ist.

Beweis :

Sei T averaging und funktionsbeschränkt .

Zu $f \in L_E^\infty(\Sigma)$ wählen wir eine Folge (g_n) nach (1') .

Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\mathcal{G}(Tf)| = |\mathcal{G}(T(\frac{f}{g_n}))| \cdot |\mathcal{G}g_n| \leq h_f \cdot |\mathcal{G}g_n| .$$

Für alle Funktionen $g \in G = TL_E(\Sigma) + E$ gilt also

$$|\mathcal{G}(Tf)| \leq h_f \cdot |\mathcal{G}g|, \text{ d.h. } T \text{ ist einkreisbar durch } |G| .$$

Nun sei umgekehrt T einkreisbar durch $|G|$.

Da G die Konstanten enthält, ist T funktionsbeschränkt .

Seien $f \in L_E^\infty(\Sigma)$, $g \in TL_E^\infty(\Sigma)$ und $h \in \mathcal{G}(G)$ eine reellwertige Funktion mit $|f| \leq |h|$, deren Existenz aus (1') folgt .

Dann ist

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}(T(f \cdot \mathcal{G}g) - \mathcal{G}(Tf) \cdot (\mathcal{G}g)(x))| &= |\mathcal{G}(T(f \cdot (\mathcal{G}g - (\mathcal{G}g)(x))))| \leq \\ &\leq h_f \cdot |h \cdot (\mathcal{G}g - (\mathcal{G}g)(x))|, \text{ d.h. } T \text{ ist averaging .} \end{aligned}$$

3.35 Korollar :

Ist unter den Voraussetzungen von Satz 3.34 der Operator T beschränkt, so ist er genau dann averaging, wenn er normeinkreisbar ist .

So ergibt sich eine Anwendung auf bedingte Erwartungen .

3.36 Korollar :

Seien zusätzlich (X, Σ, μ) lokalisierbar und $\mathcal{A}$ ein Teil- δ -Ring.

Dann ist die bedingte Erwartung $E_{\mathcal{A}} : L_E^\infty(\Sigma) \rightarrow L_E^\infty(\Sigma)$ normeinkreisbar durch $|L_E^\infty(\mathcal{A}) \cap L_E^\infty(\Sigma)|$.

Beweis :

Nach Lemma 3.11 ist $E_{\mathcal{A}} L_E^\infty(\Sigma) = L_E^\infty(\mathcal{A}) \cap L_E^\infty(\Sigma)$.

§ 4 Charakterisierung von bedingten Erwartungen als fast lokale Operatoren

Die Ergebnisse der Paragraphen 1, 2 und 3 legen es nahe zu untersuchen, ob bedingte Erwartungen Lokalitätseigenschaften besitzen.

In diesem Paragraphen seien stets :

(X, Σ, μ) ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$ eine reelle Zahl, bzw., falls (X, Σ, μ) lokalisierbar ist, $1 \leq p \leq \infty$, E ein Banachraum und außerdem $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ ein linearer Operator .

Wir betrachten nur Teil- δ -Ringe von Σ , die alle Nullmengen von Σ enthalten, ohne dies jedesmal ausdrücklich zu erwähnen .

4.1 Definition :

Eine Menge $S \in \Sigma$ heißt fast T-reduzierend, falls für alle $\tilde{f} \in L_E^p(\Sigma)$ und alle Repräsentanten f von $\tilde{f}$ und g von $T\tilde{f}$ gilt :

$$\text{Aus } f|_S = 0 \text{ folgt } g|_S = 0 \quad (\mu \text{ fast überall}) .$$

Unter den Voraussetzungen von Kapitel I besaß jede T-Klasse diese auf BIRKHOFF zurückgehende Eigenschaft genau dann, wenn der Operator T lokal war.

Da die T-Klassen bedingter Erwartungen T im Falle beliebiger Maßräume, selbst wenn man sie mit Hilfe eines Liftings definieren würde, i.a. nur Nullmengen wären, werden wir uns später spezielleren Maßräumen zuwenden müssen.

4.2 Definition :

Es sei $S \in \Sigma$ mit $\mu(S) \neq 0$.

Gilt für jede Σ -meßbare Teilmenge S' von S entweder $\mu(S) = \mu(S')$ oder $\mu(S') = 0$, so heißt S ein Atom des Maßraumes.

Der Maßraum (X, Σ, μ) heißt rein atomar, falls jede Menge $S \in \Sigma$ mit $\mu(S) \neq 0$ ein Atom enthält, und atomfrei, falls Σ keine Atome enthält .

4.3 Bemerkung :

Seien $\mathcal{A}$ ein Teil- σ -Ring von Σ und $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$

die bedingte Erwartung bezüglich $\mathcal{A}$.

Dann ist jede Menge $S \in \mathcal{A}$, die kein Atom des Maßraumes

$(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ ist und auf der alle Funktionen Tf ($f \in L_E^p(\Sigma)$)

konstant sind, eine Nullmenge .

Beweis :

Wir nehmen an, es existiere eine derartige Menge $S \in \mathcal{A}$, die keine Nullmenge ist .

Da S kein Atom ist, existiert eine Menge $S' \in \mathcal{A}$ mit

$0 < \mu(S') < \mu(S)$, und für $f = \widetilde{e \cdot 1}_{X \setminus S'}$ ($e \in E$, $e \neq 0$) folgt :

Jeder Repräsentant g von Tf ist Σ - fast überall auf

S gleich einem Element $e' \in E$.

So ergibt sich :

$$0 \neq e \cdot \mu(X \setminus S') = \int_S f d\mu = \int_S Tf d\mu = e' \cdot \mu(S), \text{ somit } e' \neq 0,$$

und weiter : $0 = \int_{S'} f d\mu = \int_{S'} Tf d\mu = e' \cdot \mu(S')$ also $e' = 0$, ein Widerspruch .

Es gilt jedoch

4.4 Bemerkung :

Sei $\mathcal{A}$ ein Teil- σ -Ring von Σ und $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ die bedingte Erwartung bezüglich $\mathcal{A}$.

Jede Menge $S \in \mathcal{A}$ ist fast T -reduzierend .

Beweis :

Zu $S \in \mathcal{A}$ und $f \in L_E^p(\Sigma)$ mit $f|_S = 0$ wählen wir einen $\mathcal{A}$ -meßbaren Repräsentanten g von Tf .

Dann erfüllt $g' := g \cdot 1_{\complement_S}$ die Axiome der bedingten Erwartung (Definition 3.8), da g sie erfüllt .

Die Umkehrung läßt sich in dieser allgemeinen Form nicht zeigen .

4.5 Bemerkung :

Seien E eine Banachalgebra mit Eins, (X, Σ, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ ein stetiger linearer E -homogener Operator, der beschränkte Funktionen auf beschränkte und die Eins auf sich abbildet, derart, daß jede Menge $S \in \Sigma$ fast T -reduzierend ist. Dann existieren i.a. keine Funktion g und kein Teil- δ -Ring $\mathcal{A}$ von Σ für die $Tf = E_{\mathcal{A}}(f \cdot g)$ ($f \in L_E^p(\Sigma)$) gilt.

Beweis :

Seien $X = [0, 1]$, das abgeschlossene Einheitsintervall in $\mathbb{R}$, Σ der Borelkörper von X , μ das Lebesguemaß, $E = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm, $p \geq 1$ beliebig fest und $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ die durch die Klassenfunktion $T_0 : \mathcal{L}_E^p(\Sigma) \rightarrow \mathcal{L}_E^p(\Sigma)$ mit $(T_0 f)(x) = (f_1(x), \int f_2 d\mu)$ für $f \in \mathcal{L}_E^p(\Sigma)$, $f = (f_1, f_2)$ und $x \in X$ induzierte Abbildung. Wir nehmen an, es existieren eine Funktion g und ein Teil- δ -Ring $\mathcal{A}$ von Σ mit $Tf = E_{\mathcal{A}}(f \cdot g)$ für alle $f \in L_E^p(\Sigma)$. Nach Konstruktion von T folgt $\mathcal{A} = \Sigma$.

Aus $\int_S f \cdot g d\mu = \int_S T f d\mu$ für alle $S \in \mathcal{A} = \Sigma$ ergibt sich für $f = (f_1, f_2) \in L_E^p(\Sigma)$ mit $f_2 \equiv 1$, daß $g_2 \equiv 1$ und mit $f_2 = \text{id}$ (Identität), daß $g_2(x) = \frac{1}{x}$ für fast alle $x \in X$, also ein Widerspruch.

Für rein atomare Teil- δ -Ringe läßt sich ein sinnvolles Analogon zur Lokalität entwickeln.

4.6 Definition :

Eine Familie $(S_i)_{i \in I}$ von Mengen eines Teil- δ -Ringes $\mathcal{A}$ von Σ heiße eine Partition von $\mathcal{A}$, falls

- keine der Mengen Nullmenge ist,
- jede Menge aus $\mathcal{A}$ mit nichtverschwindendem Maß mindestens eine der Mengen S_i modulo Σ enthält und
- der Durchschnitt verschiedener Mengen der Partition eine Nullmenge ist.

Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq r \leq \infty$.

Ein Operator $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^r(\Sigma)$ heiße fast lokal, falls ein Teil- δ -Ring $\mathcal{A}$ von Σ und eine Partition

$(S_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{A}$ existieren, wofür gilt :

a') Für alle $f \in L_E^p(\Sigma)$ und $i \in I$ ist Tf auf S_i konstant .

b') Für alle $i \in I$ ist S_i fast T -reduzierend .

Der δ -Ring $\mathcal{A}$ heiße ein zu dem fast lokalen Operator T gehöriger δ -Ring .

4.7 Bemerkung :

Unter den Prämissen von Definition 4.6 gilt :

Ist $\mathcal{A}$ ein beliebiger zu T gehöriger δ -Ring, so ist

$\mathcal{A}' := \{S \Delta N : S \in \mathcal{A}, N \Sigma\text{-Nullmenge}\}$ ein zu T gehöriger δ -Ring, der alle Σ -Nullmengen enthält .

4.8 Bemerkung :

a) Eine Partition eines Teil- δ -Ringes $\mathcal{A}$ besteht nur aus Atomen von $\mathcal{A}$.

b) Eine Partition von $\mathcal{A}$ existiert genau dann, wenn der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ rein atomar ist .

4.9. Lemma :

Es sei $\mathcal{A}$ ein Teil- δ -Ring und $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ sei rein atomar .

a) Es sei E ein Banachraum und $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ die bedingte Erwartung oder :

b) Es sei E eine Banachalgebra, $g \in L_E^\infty(\Sigma)$ (bzw. $g \in L_E^q(\Sigma)$ mit $1 < q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) und

$T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^p(\Sigma)$ (bzw. $T : L_E^p(\Sigma) \rightarrow L_E^1(\Sigma)$) die durch $Tf = E_{\mathcal{A}}(f \cdot g)$ für alle $f \in L_E^p(\Sigma)$ definierte Abbildung .

Dann ist T fast lokal .

Beweis :

a) Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse modulo $\mathcal{A}$ von Atomen von $\mathcal{A}$ einen Repräsentanten und erhalten so eine Partition P von $\mathcal{A}$.

Für $f \in L_E^P(\Sigma)$ und $S \in P$ erfüllt auch die Funktion $f' := (\frac{1}{\mu(S)} \int_S f d\mu) \cdot \tilde{1}_S + (Tf) \cdot \tilde{1}_{X \setminus S}$ die Axiome der bedingten Erwartung, die eindeutig bestimmt ist. Somit ist Tf auf S konstant.

Verschwimmt außerdem f auf S , so folgt aus dem Vorangegangenen, daß auch Tf auf S verschwindet.

b) Der Beweis verläuft analog.

Nun lassen sich bedingte Erwartungen als spezielle fast lokale Operatoren charakterisieren.

4.10 Satz :

Es seien E eine Banachalgebra mit Eins 1 und

$T : L_E^P(\Sigma) \rightarrow L_E^P(\Sigma)$ ein stetiger linearer E -homogener Operator.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

(i) Es existieren ein Teil- δ -Ring $\mathcal{A}$ von Σ , so daß

$(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ rein atomar ist und eine $\mathcal{A}$ -meßbare

Funktion $g : X \rightarrow E$ mit

$Tf = E_{\mathcal{A}}(f \cdot g)$ für alle $f \in L_E^P(\Sigma)$.

(ii) Der Operator T ist fast lokal, und es gibt einen zugehörigen Teil- δ -Ring $\mathcal{A}$ von Σ mit einer Partition P , wofür gilt :

a) Für alle $f \in L_E^P(\Sigma)$ ist Tf $\mathcal{A}$ -meßbar.

b) Für alle $S' \in P$ und alle Teilmengen $S \in \Sigma$ von S'

gilt :

$$\mu(S) \cdot \int_S T(\tilde{1}_{S'}) d\mu = \mu(S') \cdot \int_S T(\tilde{1}_S) d\mu.$$

c) Für alle $f \in L_E^P(\Sigma)$ ist

$$\{Tf \neq 0\} = \sup \{ \tilde{S} : S \in \mathcal{A}, S \subset \{Tf \neq 0\} \} \text{ in } \tilde{\Sigma}_{loc}.$$

Beweis :

Zunächst gelte Aussage (i) .

Nach Lemma 4.9 ist T fast lokal .

Bedingungen (a) und (c) sind erfüllt, da T eine bedingte Erwartung ist.

Für $S' \in \mathcal{P}$ und eine Teilmenge $S \in \Sigma$ von S' gilt, da g $\mathcal{A}$ -meßbar und somit konstant auf S' ist,

$$\int_{S'} T \tilde{1}_S d\mu = \int_{S'} g \cdot 1_{S'} d\mu . \text{ Für } e = \frac{1}{\mu(S')} \cdot \int_{S'} T(\tilde{1}_{S'}) d\mu$$

ist somit $g|_{S'} = e$ und weiter $\int_{S'} T(1_S) d\mu =$

$$= \int_{S'} g \cdot 1_S d\mu = \frac{\mu(S)}{\mu(S')} \cdot \int_{S'} T(\tilde{1}_{S'}) d\mu , \text{ also (b) .}$$

Nun gelte umgekehrt die zweite Aussage .

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas zeigen wir die Existenz

einer $\mathcal{A}$ -meßbaren Funktion $g : X \rightarrow E$ mit

$$T(\tilde{1}_S) = g \cdot 1_S \text{ für alle } S \in \mathcal{P} .$$

Es sei $\mathcal{Q}$ die Menge aller Familien P_i von Mengen $S \in \mathcal{P}$,

für die eine Funktion $g_i : X \rightarrow E$ existiert mit

$$T(\tilde{1}_S) = g_i \cdot 1_S .$$

$\mathcal{Q}$ ist durch die Vorschrift " $\leq$ " geordnet, wobei $P_1 \leq P_2$

genau wenn $P_1 \subset P_2$ und $g_2|_S = g_1|_S$ für alle $S \in P_1$.

Trivialerweise besitzt jede totalgeordnete Menge in $\mathcal{Q}$ eine obere Schranke in $\mathcal{Q}$ und somit $\mathcal{Q}$ ein maximales

Element . Es bezeichne g die zugehörige Funktion mit

$$T(\tilde{1}_S) = g \cdot 1_S \text{ für alle } S \in \mathcal{P} .$$

Da jede Menge $S \in \mathcal{A}$ höchstens abzählbar viele Mengen

aus $\mathcal{P}$ enthalten kann, ist g $\mathcal{A}$ -meßbar .

Im nächsten Beweisschritt folgt, daß $f \cdot g \in L_E^P(\Sigma)$ für

alle $f \in L_E^P(\Sigma)$. Es sei $f \in L_E^P(\Sigma)$. Es ist $\{f \neq 0\} \in \Sigma_{\mathcal{Q}}$.

Daher gibt es höchstens abzählbar viele Mengen aus $\mathcal{P}$,

deren Durchschnitt zu $\{f \neq 0\}$ keine Nullmenge ist . Sei

$$S_0 \text{ ihre Vereinigung und } g_0 := g \cdot 1_{S_0} .$$

Dann ist g_0 $\mathcal{A}$ -meßbar, und wie wir sehen werden,

wesentlich beschränkt, d.h. $g_0 \in \mathcal{L}_E^\infty(\Sigma)$.

Wäre g_0 nicht wesentlich beschränkt, so gäbe es eine aufsteigende Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mu(\{m_n < |g| \leq m_{n+1}\}) \neq 0$ wäre. Wir wählen eine Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P , so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ $S_n \subset \{m_n < |g| \leq m_{n+1}\}$, d.h. $m_n < |g| \big|_{S_n} \leq m_{n+1}$.

Dann liegt die Folge (f_m) mit $f_m := \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{\frac{1}{p}+1} \cdot \mu(S_n)^{\frac{1}{p}}} \cdot \tilde{1}_{S_n}$

und $f_\infty := \lim f_n$ (punktweise) in $L_E^p(\Sigma)$ und f_n konvergiert in $L_E^p(\Sigma)$ gegen f_∞ . Da T fast lokal ist, liegt

$$Tf_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{\frac{1}{p}+1} \cdot \mu(S_n)^{\frac{1}{p}}} \cdot g_0 \cdot \tilde{1}_{S_n} \quad (m \in \mathbb{N}) \text{ in } L_E^p(\Sigma).$$

Diese Folge konvergiert jedoch nicht in $L_E^p(\Sigma)$, was zu einem Widerspruch führt, da T stetig ist.

Da $g_0 \in \mathcal{L}_E^\infty(\Sigma)$, folgt $f \cdot g = f \cdot g_0 \in L_E^p(\Sigma)$.

Weil T fast lokal ist, gilt nach (b) für alle $S' \in P$,

$$\begin{aligned} \text{alle } S \in \Sigma \text{ mit } S \subset S' \text{ und für } e \in E \text{ mit } T(\tilde{1}_{S'})|_{S'} = e : \\ \int_{S'} T(\tilde{1}_{S'}) d\mu = \frac{\mu(S)}{\mu(S')} \cdot \int_S T(\tilde{1}_{S'}) d\mu = e \cdot \mu(S) = \int_S T(\tilde{1}_{S'}) d\mu = \\ = \int_S \tilde{1}_{S'} \cdot g d\mu. \end{aligned}$$

Jede Menge $S' \in \mathcal{A}$ enthält höchstens abzählbar viele Atome und somit folgt für alle $S' \in \mathcal{A}$ und $S \in \Sigma$ auch

$$\int_{S'} T(\tilde{1}_S) d\mu = \int_S \tilde{1}_{S'} g d\mu.$$

Da T E -homogen und stetig ist, ergibt sich für alle $S' \in \mathcal{A}$ und $f \in L_E^p(\Sigma)$ weiter:

$$\int_{S'} Tf d\mu = \int_{S'} f \cdot g d\mu.$$

Damit ist alles gezeigt.

4.11 Korollar:

Sei zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 4.10 Σ ein $\mathcal{G}$ -Körper.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Es existiert ein Teil- $\mathcal{G}$ -Körper $\mathcal{A}$ von Σ , so daß $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ rein atomar ist, und eine $\mathcal{A}$ -meßbare Funktion $g : X \rightarrow E$ mit $Tf = E_{\mathcal{A}}(f \cdot g)$ für alle $f \in L_E^p(\Sigma)$.
- (ii) Der Operator T ist fast lokal, und es gibt einen zugehörigen Teil- $\mathcal{G}$ -Körper $\mathcal{A}$ von Σ mit einer Partition P , wofür gilt :
- (a) Für alle $f \in L_E^p(\Sigma)$ ist Tf $\mathcal{A}$ -meßbar .
- (b) Für alle $S' \in P$ und alle Teilmengen $S \in \Sigma$ von S' gilt $\mu(S) \cdot \int_S T(\tilde{1}_{S'}) d\mu = \mu(S') \cdot \int_S T(\tilde{1}_S) d\mu$

Beweis :

Falls $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{G}$ -Körper ist, ist nach Bemerkung 3.9 (iv) Bedingung (c) überflüssig .

Kapitel III

Desintegration vektorwertiger Maße

In § 2 wurde bemerkt (Bemerkung 2.8), daß Bedingung (D2) für Operatoren auf $C(X)$, wobei X kompakt ist, äquivalent zur Existenz spezieller strikter Desintegrationen für die den Operator punktweise darstellenden Funktionale ist. In § 5 soll in Verallgemeinerung eines Satzes von EKELAND vom topologischen auf den abstrakten Fall eine Existenzaussage für Desintegrationen vektorwertiger Maße getroffen werden.

§ 5 Desintegration vektorwertiger Maße auf abstrakten Grundräumen

In diesem Paragraphen seien stets X und Y nichtleere Mengen, E ein Banachraum, A ein betragstabiler Vektorraum von Funktionen auf X mit Werten in E , $D = |A| - |A|$, $\mu: D \rightarrow \mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional, F ein vollständiger lokal-konvexer Hausdorffscher Raum und (F, G) ein verknüpftes Paar im folgenden Sinne .

Hier nicht erklärte Bezeichnungen finden sich in Anhang A .

5.1 Definition :

Das Paar (F, G) heißt verknüpft, wenn G ein Teilraum des topologischen Dualraumes G' von F ist derart, daß die Topologie von F die der gleichmäßigen Konvergenz auf jeder gleichstetigen Menge von G ist und die beschränkten Mengen von F relativ kompakt in der $G(F, G)$ -Topologie sind .

5.2 Definition :

Seien Z ein lokalkompakter topologischer Raum, ν ein positives Radonsches Maß auf X und E' ein Fréchet-Raum .

Sei $(p_i)_{i \in I}$ eine Familie von Halbnormen auf E' , die die Topologie von E' erzeugt .

Für jede Funktion $f : X \rightarrow E'$ definiert man

$N_{p_i}(f) := \int p_i(f(z)) d\nu(z) \quad (i \in I)$ und bezeichnet mit $G_E(Z, \nu)$ die Menge aller Funktionen $f : Z \rightarrow E'$

$N_{p_i}(f) < \infty$ für alle $i \in I$.

$\mathcal{K}_E^1(Z, \nu)$ bezeichne den Abschluß von $\mathcal{K}_E(Z)$ in $G_E(Z, \nu)$ bezüglich der durch die Familie $(N_{p_i})_{i \in I}$ von Semi-Normen definierten Topologie .

5.3 Satz (EKELAND [13] p.818) :

Es seien E' ein Fréchet-Raum, Z ein lokalkompakter topologischer Raum und μ ein positives Radonsches Maß auf Z .

Der Raum $\mathcal{K}_E(Z)$ sei mit der von $\mathcal{L}_E^1(X, \mu)$ induzierten Topologie versehen .

Weiter sei $m_0 : \mathcal{K}_E(Z) \rightarrow F$ eine lineare, bezüglich dieser Topologie stetige Abbildung . Sie kann (auf genau eine Weise) zu einer stetigen linearen Abbildung $m : \mathcal{L}_E^1(X, \mu) \rightarrow F$ erweitert werden .

Außerdem seien Y ein weiterer lokalkompakter topologischer Raum, $p : Z \rightarrow Y$ eine μ -Lusin-meßbare, μ -eigene Abbildung und $\nu = p(\mu)$ das transportierte Maß .

Dann existiert eine Abbildung $\lambda : y \rightarrow \lambda_y$ von Y in den Raum aller stetigen bilinearen Abbildungen von $L^\infty(X, \mu) \times E'$ nach F mit folgenden Eigenschaften :

Für jede Funktion $g \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$, jede Abbildung

$f \in \mathcal{L}_E^1(Y, \nu)$ und alle $x' \in G$ ist die Abbildung

$y \rightarrow \lambda_y(g, f(y), x')$ von Y nach $\mathbb{R}$ meßbar, und es gilt :

$$\langle m(g \cdot f \cdot p), x' \rangle = \int \langle \lambda_y(g, f(y)) \lambda_y x' \rangle d\nu(y) .$$

5.4 Bemerkung :

In der Arbeit von EKELAND wird die Vollständigkeit von F benötigt, um m_0 zu m fortzusetzen, jedoch unter den Voraussetzungen weggelassen .

Beweis :

Wir zeigen, daß m_0 i.a. nicht zu einer stetigen Abbildung m fortgesetzt werden kann, falls F nicht vollständig ist .

Sei $Z = [0, 1]_\mu$ das Lebesgue-Integral und $F = \mathcal{K}_R(Z) = C(Z)$ trage die durch $\mathcal{L}^1(Z, \mu)$ induzierte Norm .

Wählen wir für G den topologischen Dualraum von F , so trägt F die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den gleichgradig stetigen Teilmengen von G (ROBERTSON [34] p.57, Satz 4) .

Die normbeschränkten und $\mathcal{G}(F, G)$ -beschränkten Mengen stimmen überein (ROBERTSON [34] p.77, Satz 2), und die Topologie $\mathcal{G}(F, G)$ ist gröber als die Normtopologie, also sind alle $\mathcal{G}(F, G)$ -beschränkten Mengen relativ kompakt in $\mathcal{G}(F, G)$. Somit ist (F, G) ein verknüpftes Paar .

Die Identität $\text{id} : \mathcal{K}_R(Z) \rightarrow F$ ist stetig .

Die einzige stetige Fortsetzung von id auf $\mathcal{L}^1(Z, \mu)$ ist $\text{id} : \mathcal{L}^1(Z, \mu) \rightarrow \mathcal{L}^1(Z, \mu)$.

Die Räume F und $\mathcal{L}^1(Z, \mu)$ sind jedoch verschieden .

5.5 Definition :

Für eine Abbildung $p : X \rightarrow Y$ sei D_p der Funktionenvektorverband derjenigen Funktionen $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \circ p \in D$.

Die Abbildung p heißt A-übertragend, wenn D_p die Punkte von Y trennt .

5.6 Satz :

Sei $p : X \rightarrow Y$ eine A -übertragende Abbildung und $m_0 : A \rightarrow F$ ein bezüglich der von $\mathcal{L}^1(X, A, \mu)$ in A induzierten Halbnorm stetiger linearer Operator .
 Es bezeichne m die stetige lineare Fortsetzung von m_0 auf $\mathcal{L}_E^1(X, A, \mu)$, A_p den von $D_p \cdot E$ erzeugten Vektorraum und $\nu : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ das durch p transportierte Funktional μ .
 Dann existiert eine Abbildung $\lambda : y \rightarrow \lambda_y$ von Y in den Raum der stetigen bilinearen Abbildungen von $L^\infty(X, D, \mu) \times E$ in F mit folgenden Eigenschaften :
 Für jede Funktion $g \in \mathcal{L}^\infty(X, D, \mu)$, jede Funktion $f \in \mathcal{L}_E^1(Y, A_p, \nu)$ und alle $x' \in G$ ist die Abbildung $y \rightarrow \langle \lambda_y(g, f(y)), x' \rangle$ von Y nach $\mathbb{R}$ meßbar und es gilt :

$$\langle m(g \cdot f \circ p), x' \rangle = \int \langle \lambda_y(g, f(y)), x' \rangle d\nu(y) .$$

5.7 Bemerkung :

Seien X und Y kompakt .

Der Beweis von Satz 5.6 als Folgerung von Satz 5.3 ist nicht möglich. Aus dem Satz von EKELAND folgt nur, daß für alle Funktionen $g \in \mathcal{L}^\infty(Y, C(Y), \nu)$, $f \in \mathcal{L}_E^1(X, C(X, E), \mu)$ und alle $x' \in G$ eine Funktion $h(f, g, x') \in \mathcal{L}^1(Y, C(Y), \nu)$ existiert, wofür gilt :

$$\dot{N}(\langle \lambda \cdot (f, g(y)), x' \rangle - (h(f, g, x'))) = 0 , \text{ wobei } \lambda \text{ wie}$$

 im Satz von EKELAND definiert sei.

Daher ist es nötig, um diesen Satz zu übertragen, den im Beweis verwendeten Darstellungssatz zu übertragen (Anhang B) .

Beweis von Satz 5.6 :

Wir können annehmen, daß $p : X \rightarrow Y$ surjektiv ist, da wir andernfalls $p(X)$ statt Y betrachten können, die Menge $Y \setminus p(X)$ per def. von ν eine Nullmenge ist und wir somit $\lambda_y = 0$ für alle $y \in Y \setminus p(X)$ setzen können .

Zunächst wird der Satz für kompakte Räume X und Y , eine stetige Abbildung $p : X \rightarrow Y$ und $A = C(X, E)$, $D = C(X)$, $A_p = C(Y, E)$ und $D_p = C(Y)$ bewiesen.

Dieser Teil verläuft vollkommen analog zu EKELAND [18].

Die Vervollständigung des projektiven topologischen Tensorproduktes der Banachräume $L^\infty(X, D, \mu)$ und E ist ein Banachraum und werde mit $\hat{E}$ bezeichnet.

Man definiert einen stetigen bilinearen Operator

$\phi : \mathcal{L}^\infty(X, C(X), \mu) \times \mathcal{L}_E^1(Y, C(Y, E), \nu) \rightarrow F$, indem man jedem Paar (g, f) das Element $m(g \cdot f \circ p)$ von F zuordnet.

Es bezeichne j die Einbettungsabbildung

$j : \mathcal{L}^\infty(X, C(X), \mu) \times \mathcal{L}_E^1(Y, C(Y, E), \nu) \rightarrow L_E^1(Y, C(Y, \hat{E}), \nu)$, die jedem Paar (g, f) die Funktion h , definiert durch

$h(y) = g(y) \cdot \tilde{f}$ für alle $y \in Y$ zuordnet.

Nach EKELAND [18] existiert (genau) eine stetige lineare Abbildung $\tilde{\phi} : L_E^1(Y, C(Y, \hat{E}), \nu) \rightarrow F$ mit $\tilde{\phi} \circ j = \phi$.

Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller $(\mathcal{G}(F, G)-)$ beschränkten Teilmengen von F und $\mathcal{B}$ die Menge aller gleichstetigen Mengen von G , die bekanntermaßen $\mathcal{G}(G, F)$ -beschränkt sind.

Nach Satz B 12 existiert eine Abbildung $T : Y \rightarrow \mathcal{L}(\hat{E}, F)$ derart, daß für alle Funktionen $f \in L_E^1(Y, C(Y, \hat{E}), \nu)$ und alle $x' \in G$ die Funktion $\langle T(y)f(y), x' \rangle$ meßbar ist und

$$\langle \tilde{\phi}(f), x' \rangle = \int \langle T(y)f(y), x' \rangle d\nu(y) \text{ gilt.}$$

Definiert man für alle $y \in Y$, $g \in L^\infty(X, C(X), \mu)$ und alle $e \in E : \lambda_y(g, e) := (T(y))(g \otimes e)$, so ist die Aussage des Theorems für kompakte Räume X und Y bewiesen.

Nun seien X , Y , $p : X \rightarrow Y$, A , D , A_p , D_p , μ , ν , m wie in den Voraussetzungen.

Weiter seien : $\bar{A}$, $\bar{D}$, $\bar{A}_p$ und $\bar{D}_p$ die Vervollständigungen von A , D , A_p und D_p bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, X' und Y' die Kompaktifizierungen von X und Y nach Satz A8, $A' = C(X', E)$, $D' = C(X')$, $A'_p = C(Y', E)$ und $D'_p = C(Y')$ die stetigen Fortsetzungen der Funktionen

aus $\bar{A}$ usw. auf X' bzw. Y' , $\bar{\mu}$ bzw. $\bar{\nu}$ die Fortsetzungen von μ bzw. ν auf $\bar{D}$ bzw. $\bar{D}_p$ und μ' bzw. ν' die kanonisch induzierten positiven linearen Funktionale auf D' bzw. D'_p , $m' : \mathcal{L}_E^1(X, C(X', E), \mu') \rightarrow F$ die durch m induzierte Abbildung und $p' : X' \rightarrow Y'$ die stetige Fortsetzung von p .

Es gilt : $\bar{\nu}(f) = \bar{\mu}(f \circ p)$ für alle $f \in \bar{D}_p$, und da p' stetig ist :

$f' \circ p' \in D'$ und $\nu'(f') = \mu'(f' \circ p')$ für alle $f' \in D'_p$.

Nach dem ersten Teil des Beweises existiert eine Abbildung $\lambda' : y \rightarrow \lambda'_y$ von Y' in dem Raum der stetigen bilinearen Abbildungen von $L^\infty(X', D', \mu') \times E$ in F , die die Aussage des Theorems für m' , $\mathcal{L}^\infty(X', D', \mu')$ und $\mathcal{L}_E^1(Y', A'_p, \nu')$ erfüllt.

Nach Anhang A sind $L^\infty(X', C(X'), \mu')$ und $L^\infty(X, D, \mu) = L^\infty(X, \bar{D}, \bar{\mu})$ isometrisch isomorph und auch $L_E^1(X', C(Y', E), \nu')$ und $L_E^1(Y, A_p, \nu) = L_E^1(Y, \bar{A}_p, \bar{\nu})$.

Wir definieren λ als die Restriktion von λ' auf Y .

Nach Anhang A folgt die gewünschte Aussage.

5.8 Korollar :

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.6 seien

$\Sigma = \Sigma(X, D, \mu)$, Σ' eine $\mathcal{G}$ -Algebra, deren Indikatorfunktionen die Punkte von Y trennen, und $p : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung.

Dann gilt die Aussage des Satzes 5.6 für die Räume aller E -wertigen (bzw. reellwertigen) Σ' -Treppenfunktionen anstelle von A_p (bzw. D_p).

Beweis :

Wir können annehmen, daß A (bzw. D) alle E -wertigen (bzw. reellwertigen) Σ -Treppenfunktionen enthält, da dadurch die Räume $\mathcal{L}_E^1(X, A, \mu)$, $\mathcal{L}^1(X, D, \mu)$ und $\mathcal{L}^\infty(X, D, \mu)$ nicht vergrößert werden.

Dann enthält D_p alle reellwertigen Σ' -Treppenfunktionen, und $L_E^1(Y, A_p, \nu)$ wird allenfalls vergrößert, wodurch die Gültigkeit der gewünschten Aussage nicht beeinträchtigt wird.

Da m_0 immer auf ganz $\mathcal{L}_E^1(X, A, \mu)$ fortgesetzt wird, sind alle Voraussetzungen von Satz 5.6 erfüllt.

5.9 Bemerkung :

Seien X und Y kompakt, μ ein positives Radonsches Maß auf X und $p : X \rightarrow Y$ eine μ -Lusin-meßbare Abbildung.

Dann gilt die Aussage von Satz 5.6 für

$A = C(X, E)$, $D = C(X)$ und $C(Y)$ statt D_p bzw. $C(Y, E)$ statt A_p für den Integrationsprozeß nach BOURBAKI.

Beweis :

Da p bezüglich der durch die Topologien von X bzw. Y erzeugten $\mathcal{G}$ -Körper Σ bzw. Σ' meßbar ist, läßt sich das Korollar 5.8 anwenden.

Die Aussage für den Integrationsprozeß nach BOURBAKI folgt aus den Ergebnissen von Anhang A.

5.10 Definition :

Seien (X, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, (Y, Σ') ein Maßraum, $p : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung, $\nu = p(\mu)$ das Bildmaß, F ein Banach-Raum, G ein beliebiger Teilraum des Dualraumes von F .

Es bezeichne $\mathcal{M}(\Sigma, F)$ (bzw. $\mathcal{M}_G(\Sigma, F)$) die Menge aller (bzw. aller endlichen additiven) Maße auf Σ mit Werten in F .

Ein Maß $m \in \mathcal{M}(\Sigma, F)$ (bzw. $m \in \mathcal{M}_G(\Sigma, F)$) heißt dominiert durch μ , falls für jede Menge $S \in \Sigma$ gilt : $\|m(S)\| \leq \mu(S)$. Es sei m durch μ dominiert.

Eine Abbildung $\lambda: Y \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, F)$ (bzw. $\lambda: Y \rightarrow \mathcal{M}_e(\Sigma, F)$) heißt Desintegration (bzw. endlich additive Desintegration) von m bezüglich Σ' , p und G , falls für alle $S \in \Sigma$, $S' \in \Sigma'$ und $x' \in G$ die Abbildung $y \rightarrow \langle \lambda_y(S), x' \rangle$ meßbar ist und

$$\langle m(S \wedge p^{-1}(S')), x' \rangle = \int_{S'} \langle \lambda_y(S), x' \rangle dv(y) .$$

5.11 Korollar zu Satz 5.6 :

Der Raum F besitze zusätzlich Banachraum-Struktur .
Außerdem seien (X, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, (Y, Σ') ein Maßraum, $m \in \mathcal{M}(\Sigma, F)$ werde durch μ dominiert,
 $p: X \rightarrow Y$ sei eine meßbare Abbildung und ν das mit p transportierte Maß μ auf Σ' .
Die Indikatorfunktionen der Mengen von Σ' trennen die Punkte von Y . Dann existiert eine endlich additive Desintegration von m bezüglich Σ' , p und G .

Beweis :

Wir wählen für E die reellen Zahlen und für A und D den Raum aller reellwertigen Σ -Treppenfunktionen .
Da Σ ein σ -Körper ist, ist D ein Funktionenvektorverband, der die Eins enthält .

Wir können annehmen, daß D die Punkte von X trennt .
Für Treppenfunktionen definieren wir auf übliche Weise das Integral und weiter $m(f) := \int f d\mu$ und
 $\mu(f) := \int f d\mu$ für alle $f \in A = D$.

Wir versehen A mit der durch μ induzierten Topologie .
Da $\|m(f)\| \leq \mu(|f|)$ für alle $f \in A$ (vgl. z.B. DINICULEANU [7] p.110, Prop. 2), ist $m: D \rightarrow F$ stetig .

Es ist D_p der Raum aller reellwertigen Σ' -Treppenfunktionen .

Aus Satz 5.6 folgt :

Es existiert eine Abbildung $\lambda' : Y \rightarrow \lambda'_y$ von Y in den Raum aller stetigen bilinearen Abbildungen von $L^\infty(X, D, \mu) \times E$ nach F mit folgenden Eigenschaften :

Für alle Mengen $S \in \Sigma$, $S' \in \Sigma'$ und alle $x' \in G$ ist die

Abbildung $y \rightarrow \langle \lambda'_y(1_S, 1_{S'}(y)), x' \rangle$ meßbar,

und es gilt :

$$\langle m(1_S, 1_{S'}(p)), x' \rangle = \int_Y \langle \lambda'_y(1_S, 1_{S'}(y)), x' \rangle d\nu(y) .$$

Für alle $y \in Y$ und $S \in \Sigma$ definieren wir

$$\lambda_y(S) := \lambda'_y(1_S, 1) .$$

Da λ'_y bilinear ist, ist λ_y endlich additiv, und alles ist gezeigt .

§ 6 Strikte Desintegration vektorwertiger Maße auf abstrakten Grundräumen

Im Zusammenhang mit Bemerkung 2.8 interessiert die Striktheit der in § 5 gewonnenen Desintegrationen .

6.1 Zusatz zu Satz 5.6:

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.6 sei für ein festes $y \in Y$ die Menge $p^{-1}(y) \in \Sigma(X, D, \mu)$ -meßbar.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) Für alle $f \in A$ gilt :

$$m(f) = m(f \cdot 1_{p^{-1}(y)}) .$$
- (ii) Es existiert eine Abbildung λ mit den Eigenschaften von Satz 5.6 und
 - a) Für alle $z \in Y$ mit $z \neq y$ ist $\lambda_z = 0$.
 - b) Für alle $e \in E$ und alle Funktionen $g \in \mathcal{L}^{loc}(X, D, \mu)$ mit $\{g \neq 0\} \cap p^{-1}(y) = \emptyset$ gilt :

$$\lambda_y(g, e) = 0 .$$

Beweis :

Sei λ eine Abbildung mit den Eigenschaften von Satz 5.6 .

Wenn (i) gilt, folgt $m(g \cdot e) = m(g \cdot e \cdot 1_{p^{-1}(y)})$ für alle $e \in E$ und $g \in \mathcal{L}^{loc}(X, D, \mu)$. Man kann also annehmen, daß λ die Eigenschaften a) und b) besitzt .

Aus (ii) folgt für alle $e \in E$ und $g \in \mathcal{L}^{loc}(X, D, \mu)$, daß

$\langle m(g \cdot e \cdot 1_{X \setminus p^{-1}(y)}), x' \rangle = 0$, für alle $x' \in G$,
 also $m(g \cdot e \cdot 1_{X \setminus p^{-1}(y)}) = 0$, also $m(g \cdot e) = m(g \cdot e \cdot 1_{p^{-1}(y)})$
 und, da m stetig ist, nach Satz 8 und Lemma A 9 $m(f) = m(f \cdot 1_{p^{-1}(y)})$ für alle $f \in A$.

6.2. Bemerkung :

Seien X kompakt, $T : C(X, E) \rightarrow C(X, E)$ ein Operator,
 $Y = X/T$ und $p : X \rightarrow Y$ die kanonische Surjektion .
 Dann besitzt T genau dann Eigenschaft (D2)
 (Definition 2.1), wenn eine Familie $(m_x)_{x \in X}$ den
 Operator punktweise darstellender Borelmaße mit
 Eigenschaft (i) von Korollar 6.1 existiert .

Zum Schluß sollen noch einige für den Fall reellwertiger
 Maße (RAUCH [31]) bekannte Ergebnisse für die Striktheit
 von Desintegrationen erwähnt werden .

Im folgenden wird vorausgesetzt :

Seien (X, Σ, μ) ein Maßraum, (Y, Σ') ein Maßraum,
 $p : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung, F ein Banachraum,
 G ein Teilraum des Dualraumes von F , $\nu = p(\mu)$ das
 Bildmaß von μ , $m \in \mathcal{M}(\Sigma', F)$ sei durch μ dominiert .

6.3 Definition :

Sei λ eine (endliche additive) Desintegration von m
 bezüglich Σ' , p und G . Seien $x' \in G$ und $y \in Y$.
 Man sagt, $\langle \lambda_y(\cdot), x' \rangle$ wird von einer Menge $S \in \Sigma$ getragen,
 wenn aus $S' \in \Sigma$ mit $S' \cap S = \emptyset$ folgt :

$$\langle \lambda_y(S'), x' \rangle = 0 .$$

Das Atom $\langle x \rangle$ eines Elementes $x \in X$ ist der Durchschnitt
 aller Mengen aus Σ , die x enthalten .

Der δ -Ring Σ heißt μ -Q-separabel, falls es in Σ eine
 Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Nullmenge N gibt, so daß für
 alle $x \in X \setminus N$ gilt :

$$\langle x \rangle = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

und heißt μ -separabel, falls er μ -Q-separabel ist und
 für alle $x \in X \setminus N$ gilt :

$$\langle x \rangle = \{x\} .$$

6.4 Lemma :

Es sei $\lambda: Y \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, F)$ (bzw. $\lambda: Y \rightarrow \mathcal{M}_e(\Sigma, F)$) eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften :

1. Für alle $S \in \Sigma$ und alle $x' \in G$ ist die Abbildung
 $y \rightarrow \langle \lambda_y(S), x' \rangle$ von Y nach $\mathbb{R}$ meßbar .
2. Für jede Menge $S \in \Sigma$ und alle $x' \in G$ gilt :

$$\langle m(S), x' \rangle = \int_Y \langle \lambda_y(S), x' \rangle d\nu.$$

Weiter sei $\Sigma' \nu$ -Q-separabel .

Dann ist λ genau dann eine Desintegration (bzw. endlich additive Desintegration) bezüglich Σ' , p und G , wenn für alle $x' \in G$ für ν -fast alle y die Funktion $\langle \lambda_y(\cdot), x' \rangle$ von $p^{-1}(\langle y \rangle)$ getragen wird .

Beweis :

Zunächst sei λ eine (endlich additive) Desintegration und $x' \in G$.

Da $\Sigma' \nu$ -Q-separabel ist, existieren in Σ' eine Folge (S_n) und eine Nullmenge N , so daß für alle $y \in Y \setminus N$ gilt :
 $\langle y \rangle = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

Für jede solche Menge S_n und für alle Teilmengen $S'_n \in \Sigma$ erhält man :

$$0 = \langle m(p^{-1}(S'_n) \cap p^{-1}(S_n)), x' \rangle = \int_{S'_n} \langle \lambda_y(p^{-1}(S_n)), x' \rangle d\nu(y) .$$

Es folgt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $N_n(x') \in \Sigma'$ existiert mit $\langle \lambda_y(p^{-1}(S_n)), x' \rangle = 0$ für alle $y \in (N_n(x') \cap S_n)$.

Damit ergibt sich :

Ist $y \in (\bigcup_n N_n(x') \cup N)$ und $S \in \Sigma$ mit

$$S \cap \bigcap_n p^{-1}(S_n) = \bigcap_n (p^{-1}(S_n) \cap S) = \emptyset, \text{ so ist}$$

S eine Teilmenge von $\bigcap_{y \in S_n} p^{-1}(S_n)$ und somit

$$\langle \lambda_y(S), x' \rangle = 0 .$$

Dies bedeutet aber, daß $\langle \lambda_y(\cdot), x' \rangle$ von der Menge

$$\bigcap_{y \in S_n} p^{-1}(S_n) = p^{-1}\left(\bigcap_{y \in S_n} S_n\right) = p^{-1}(\langle y \rangle)$$

getragen wird .

Wenn umgekehrt für ν -fast alle $y \in Y$ gilt :

$\langle \lambda_y(\cdot), x' \rangle$ wird von $p^{-1}(\langle y \rangle)$ getragen, so ist nur noch zu zeigen, daß für alle $S \in \Sigma$, $S' \in \Sigma'$ und $x' \in G$ gilt :

$$\langle m(S \cap p^{-1}(S')), x' \rangle = \int_{S' \cap Y} \langle \lambda_y(S), x' \rangle d\nu(y) .$$

Nach 2. gilt :

$$\langle m(S \cap p^{-1}(S')), x' \rangle = \int_Y \langle \lambda_y(S \cap p^{-1}(S')), x' \rangle d\nu(y) .$$

Liegt y in S' , so ist $\langle y \rangle$ Teilmenge von S' und es gilt :

$$S \cap p^{-1}(\langle y \rangle) \subset S \cap p^{-1}(S') .$$

Wir können annehmen, daß $\langle \lambda_y(\cdot), x' \rangle$ von $p^{-1}(\langle y \rangle)$ getragen wird, und es folgt :

$$\langle \lambda_y(S \cap p^{-1}(S')), x' \rangle = \langle \lambda_y(S), x' \rangle .$$

Liegt y in $Y \setminus S'$, so ist $\langle y \rangle \subset Y \setminus S'$, d.h. $\langle y \rangle \cap S' = \emptyset$.

Es folgt : $p^{-1}(\langle y \rangle) \cap (S \cap p^{-1}(S')) = \emptyset$ und damit :

$$\langle \lambda_y(S \cap p^{-1}(S')), x' \rangle = 0 .$$

Also gilt :

$$\begin{aligned} \langle m(S \cap p^{-1}(S')), x' \rangle &= \int_Y \langle \lambda_y(S \cap p^{-1}(S')), x' \rangle d\nu(y) = \\ &= \int_{S'} \langle \lambda_y(S), x' \rangle d\nu(y) . \end{aligned}$$

6.5 Bemerkung :

Sei λ die endlich additive Desintegration von Korollar 5.11, und Σ' sei ν -Q-separabel .

Dann wird für alle $x' \in G$ für ν -fast alle y die Funktion $\langle \lambda_y(\cdot), x' \rangle$ von $p^{-1}(\langle y \rangle)$ getragen .

6.6 Korollar :

Ist unter den Voraussetzungen des Lemmas 6.4

Σ' ν -separabel, so folgt :

Die Abbildung λ ist genau dann eine Desintegration (bzw. endlich additive Desintegration) von m bezüglich Σ' , p und G , wenn für jedes $x' \in G$ für ν -fast alle y die Funktion $\langle \lambda_y(\cdot), x' \rangle$ von $p^{-1}(y)$ getragen wird.

Beweis :

Das Korollar ist eine direkte Folge von Lemma 6.4 und der Definition der ν -Separabilität .

6.7 Lemma (RAUCH [31] S.33, Satz 7) :

Folgende Aussagen sind äquivalent :

- (i) Σ' ist ν -separabel .
- (ii) In Σ' gibt es eine Folge (S_n) und eine Nullmenge N , so daß für alle $y \in Y \setminus N$ und alle $y' \in Y$ gilt :
Sind y und y' verschieden, so gibt es eine Menge S_n der Folge, die y enthält und y' nicht .
- (iii) Es gibt eine Nullmenge $N \in \Sigma'$ und eine meßbare Abbildung $f : Y \rightarrow [0, 1]$, so daß für alle $y \in Y \setminus N$ und alle $y' \in Y$ gilt :
Sind y und y' verschieden, so auch ihre Bilder .
- (iv) Es gibt eine Nullmenge $N \in \Sigma'$ und eine Teilmenge C von $N \times N$, so daß gilt :
Die Menge $\{(y, y') : y \in Y \setminus N\} \cup C$ liegt in der von $\Sigma \times \Sigma$ erzeugten σ -Algebra .

Anhang

Integrationstheoretische Grundlagen

Im Anhang werden eine Reihe von größtenteils bekannten Aussagen zusammengefaßt, auf denen ein Teil der Beweise von Kapitel I und III aufbaut.

A Topologische Darstellung abstrakter Integrale auf Räumen reell- bzw. vektorwertiger Funktionen

In diesem Abschnitt seien X eine nichtleere Menge, E ein Banachraum, A ein betragstabiler Vektorraum von Funktionen auf X mit Werten in E und D ein Raum reellwertiger Funktionen auf X im Sinne folgender Definition und $\mu: D \rightarrow \mathbb{R}$ ein positives lineares σ -stetiges Funktional auf D .

A 1 Definition :

Der Vektorraum A heiße betragsstabil, falls der von den Beträgen der Funktionen von A erzeugte Funktionenvektorverband D

- a) die Punkte von X trennt,
- b) das Stonesche Axiom erfüllt (d.h. $f \wedge c \in D$ für alle $f \in D$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$),
- c) für alle $x \in X$ eine Funktion $g \in D$ mit $g(x) \neq 0$ existiert,
- d) $D \cdot E \subset A$ gilt .

Grundlage der topologischen Darstellung abstrakter Integrale ist eine Kompaktifizierungsaussage von NÖBELING und BAUER, die in dieser Arbeit in verallgemeinerter Form benötigt wird .

A 2 Bemerkung :

Sei A_0 ein punktstrennender Raum von Funktionen, der alle Konstanten enthält, mit $(|A_0| - |A_0|) \cdot E \in A_0$,
so ist A_0 betragsstabil mit $D_0 = |A_0| - |A_0|$.

Die Definitionen und Bemerkungen A3 - A5 wurden BOURBAKI [6] pp. 9 entnommen .

A 3 Definition :

Eine Abbildung $\delta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt Quasi-Metrik, falls gilt :

- a) Für jedes $x \in X$ ist $\delta(x, x) = 0$.
- b) Für alle $x, y \in X$ ist $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.
- c) Für alle $x, y, z \in X$ ist $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

A 4 Definition :

Es sei $\Delta = (\delta_i)_{i \in I}$ eine Familie von Quasi-Metriken .
Dann heißt das Supremum der Menge derjenigen uniformen Strukturen auf X , die durch jeweils eine der Quasi-Metriken δ_i definiert sind, die durch die Familie Δ auf X definierte uniforme Struktur .

A 5 Bemerkung :

Das Fundamentalsystem

$$\left\{ \bigcap_{k=1}^n \delta_{i_k}^{-1}([0, r]) : n \in \mathbb{N}, (\delta_{i_k})_{1 \leq k \leq n} \subset \Delta, r \in \mathbb{R}, r > 0 \right\}$$

erzeugt Δ .

A 6 Bemerkung :

- a) Für alle $f \in A$ ist $\|f\| \in D$ und für alle $x, y \in X$ gilt :
 $\| \|f\|(x) - \|f\|(y) \| \leq \|f(x) - f(y)\|$.
- b) Für alle $f \in D$ existiert $f' \in A$ mit
 $\|f'(x) - f'(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\|$ für alle $x, y \in X$.

Beweis :

Da A betragsstabil ist, sind die Aussagen richtig .

A 7 Lemma (NÖBELING [27] p.208, 27.4) :

Seien Z ein uniformer Raum, Y ein vollständiger Hausdorffscher uniformer Raum, Z_0 ein dichter Unterraum von Z und $p_0 : Z_0 \rightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung .

Dann existiert eine gleichmäßig stetige Abbildung $p : Z \rightarrow Y$, die p_0 fortsetzt .

Alle Aussagen des folgenden Satzes für reellwertige Funktionen wurden von NÖBELING/BAUER bewiesen .

A 8 Satz (NÖBELING/BAUER [28]) :

Zu X , A und D existiert ein lokal kompakter Raum

$X' = X'_A = X'_D$ mit folgenden Eigenschaften :

(i) X ist eine dichte Teilmenge von X' .

(ii) Jede Funktion $f \in A$ bzw. $f_0 \in D$ kann (auf genau eine Weise) zu einer auf X' stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion f' bzw. f'_0 fortgesetzt werden .

(iii) Die Menge D' der Fortsetzungen von Funktionen aus D ist punktgetrennt, und für alle $x \in X'$ existiert eine Funktion $f'_0 \in D'$ mit $f'_0(x) \neq 0$.

X' ist bis auf Homöomorphien durch die Eigenschaften

(i) - (iii) eindeutig bestimmt und genau dann kompakt, wenn D die Konstante 1 enthält .

Beweis :

Alle Aussagen außer (ii) für A wurden in BAUER [2] p.471, Satz 12 bewiesen .

Nach BAUER [2] p.450, Lemma 1 ist der Abschluß $\bar{D}$ von D (bezüglich gleichmäßiger Konvergenz) eine Algebra .

Es bezeichne D_1 die von $\bar{D}$ und der Konstanten 1 erzeugte Algebra .

Durch $\delta_f(x,y) := |f(x) - f(y)|$ ($f \in D_1, x,y \in X$) ist eine Familie $(\delta_f)_{f \in D_1}$ von Quasi-Metriken auf X definiert .

$\mathcal{U}$ bezeichne die dadurch auf X definierte uniforme Struktur.

Nach einem alternativen Beweis für den reellwertigen Fall in NÖBELING/BAUER [28] p.65 ist die Einpunkt-kompaktifizierung X von X' die Vervollständigung von X bezüglich $\mathcal{U}$.

Da nach der Definition von $\mathcal{U}$ jede Funktion $f_0 \in D$ gleichmäßig stetig bezüglich $\mathcal{U}$ ist, ist es nach Bemerkung A 6 auch jede Funktion $f \in A$, und (ii) folgt aus Lemma A 7 .

A 9 Lemma :

Es sei Z ein lokalkompakter Raum .

Dann liegt der Raum aller Funktionen $f : X \rightarrow E$ mit $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $(f_i) \subset C(Z)$, $f_i \geq 0$ und $(e_i) \subset E$, dicht in $C_0(Z, E)$.

Beweis :

Falls Z kompakt ist, findet man den Beweis z.B. in DINCULEANU [7] p.375, Corollary ad Proposition 1 . Mittels Einpunktkompaktifizierung folgt der Rest .

A 10 Lemma :

Für die Abschlüsse von A' in $C_0(X', E)$ und D' in $C_0(X')$ gilt :

$A' = C_0(X', E)$ und $D' = C_0(X')$.

Beweis :

Nach dem Approximationssatz von STONE liegt für die Einpunktkompaktifizierung X von X' der Raum

$D' + \mathbb{R} \cdot 1$ dicht in $C(X)$ und somit D' dicht in $C_0(X')$.

Für alle $e \in E$ und $f \in D'$ liegt $e \cdot f$ in A' .

Aus Lemma A 9 folgt $A' = C_0(X', E)$.

A 12 Bemerkung :

Für die Abschlüsse $\bar{A}$ und $\bar{D}$ von A bzw. D bezüglich gleichmäßiger Konvergenz gilt :

$$X_{\bar{A}}' = X_{\bar{D}}' = X_A' = X_D'.$$

Die anschließend aufgeführten (auf dem Satz von NÖBELING/BAUER basierenden) Aussagen zur topologischen Darstellung abstrakter Integrale wurden von BAUER [3] (für integrierbare vektorwertige Funktionen) und von KÖLZOW [23] (für integrierbare und für meßbare reellwertige Funktionen) bewiesen.

A 13 Definition :

Nach dem 1. Stoneschen Erweiterungsprozeß für Folgen ist für jede nichtnegative Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ das obere Integral $\bar{\mu}$ folgendermaßen definiert.

Es bezeichne $F(f)$ die Menge aller Folgen $(f_n) \subset D$ mit $f \leq \sup f_n$.

$$\bar{\mu}f := \begin{cases} +\infty, & \text{falls } F(f) = \emptyset \\ \inf \left\{ \sup_n \mu(f_n) : (f_n) \in F(f) \right\}, & \text{falls } F(f) \neq \emptyset \end{cases}$$

Für eine beliebige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$Nf := \bar{\mu}(|f|).$$

Es bezeichne

$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, D, \mu)$ die Vervollständigung von D bezüglich N im Raum G^1 aller Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Nf < \infty$,

$L^1 = L^1(X, D, \mu)$ den zugehörigen normierten Raum,

$\int f d\mu := N(f^+) - N(f^-)$ das Integral von $f \in \mathcal{L}^1$ und

$\Sigma = \Sigma(X, D, \mu)$ die σ -Algebra aller Mengen $S \subset X$ mit $1_S \in \mathcal{L}^1$.

Für jede Menge $S \in \Sigma$ ist das Maß $\mu(S)$ definiert durch

$$\mu(S) := N(1_S) .$$

Für eine weitere nichtleere Menge Y und eine σ -Algebra Σ' in Y heißt eine Abbildung $p : X \rightarrow Y$ meßbar (genauer: (Σ, Σ') -meßbar), falls für alle Mengen $S' \in \Sigma'$ die Menge $p^{-1}(S')$ in Σ liegt.

Eine Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt meßbar (genauer: Σ -meßbar), falls für jede offene Teilmenge O von $\bar{\mathbb{R}}$ die Menge $f^{-1}(O)$ in Σ liegt .

$M^\infty = M^\infty(X, D, \mu)$ bezeichnet den Raum aller beschränkten reellwertigen meßbaren Funktionen,

$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, D, \mu)$ den Raum aller μ -wesentlich beschränkten meßbaren Funktionen $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$,

$L^\infty = L^\infty(X, D, \mu)$ den zugehörigen normierten Raum .

Sei r eine reelle Zahl mit $1 \leq r < \infty$.

Für jede Funktion $f : X \rightarrow E$ sei

$$N_{E,r}(f) := N(|f|^r)^{\frac{1}{r}}$$

Seien $\mathcal{L}_E^r = \mathcal{L}_E^r(X, A, \mu)$ die Vervollständigung von A bezüglich $N_{E,r}$ im Raum $\mathcal{G}_E^r = \mathcal{G}_E^r(X, A, \mu)$ aller Funktionen $f : X \rightarrow E$ mit $N_{E,r}(f) < \infty$ und $L_E^r = L_E^r(X, A, \mu)$ der zugehörige normierte Raum .

Im folgenden seien Z ein lokalkompakter topologischer Raum und $\nu : \mathcal{K}(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ ein positives Radonsches Maß .

A 14 Definition :

Jedes positive lineare Funktional $\nu : \mathcal{K}(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein positives Radonsches Maß .

Das Oberintegral $\int f d\nu$ ist

für jede nichtnegative von unten halbstetige Funktion

$h : Z \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\int f d\nu := \sup \{ \nu(g) : g \in \mathcal{K}(Z), 0 \leq g \leq f \}$$

und für eine beliebige nichtnegative Funktion $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int f d\nu := \inf \left\{ \int h d\nu : h \text{ von unten halbstetig, } |h| \leq |f| \right\} .$$

Für eine beliebige Funktion $f : Z \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sei

$$\dot{N}f := \int f \, d\nu,$$

$\dot{\mathcal{L}}^1 = \dot{\mathcal{L}}^1(Z, \nu)$ bezeichne die Vervollständigung bezüglich $\dot{N}$ von $\mathcal{K}(Z)$ im Raum $\dot{\mathcal{F}}^1 = \dot{\mathcal{F}}^1(Z, \nu)$ aller Funktionen $f : Z \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $\dot{N}f < \infty$, $\dot{L}^1 = \dot{L}^1(Z, \nu)$ den Raum aller Äquivalenzklassen modulo $\dot{N}$ und

$$\int f \, d\nu := \dot{N}(f^+) - \dot{N}(f^-) \text{ das Integral von } f \in \dot{\mathcal{L}}^1.$$

Die Begriffe $\dot{\Sigma} = \dot{\Sigma}(Z, \nu)$ und $\dot{\nu}$ seien analog Definition

A 13 erklärt.

Für jede nichtnegative Funktion $f : Z \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt

$$\nu^e(f) = \int f \, d\nu := \sup \left\{ \int f \cdot 1_K \, d\nu : K \subset Z \text{ kompakt} \right\}$$

das wesentliche obere Integral.

Sei Z' ein weiterer Hausdorffscher Raum.

Eine Funktion $p : Z \rightarrow Z'$ heißt ν -Lusin-meßbar, falls

zu jeder kompakten Teilmenge K von Z eine Folge

$(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter kompakter Mengen existiert, so daß $K \setminus \bigcup K_n$ eine ν^e -Nullmenge ist, und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Restriktion von p auf K_n stetig ist.

Die Funktion f heißt ν -eigen, falls zusätzlich für jede kompakte Teilmenge K' von Z' gilt :

$$\nu^e(1_{p^{-1}(K')}) < \infty.$$

$\dot{M}^\infty = \dot{M}^\infty(Z, \nu)$ bezeichnet den Raum aller beschränkten

ν -Lusin-meßbaren Funktionen $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$,

$\dot{\mathcal{L}}^\infty = \dot{\mathcal{L}}^\infty(Z, \nu)$ den Raum aller ν -wesentlich beschränkten ν -Lusin-meßbaren Funktionen $f : Z \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$,

$\dot{L}^\infty = \dot{L}^\infty(Z, \nu)$ den zugehörigen normierten Raum.

$\dot{N}_{E,r}, \dot{\mathcal{F}}_E^r, \dot{\mathcal{L}}_E^r = \dot{\mathcal{L}}_E^r(Z, \nu)$ und $\dot{L}_E^r = \dot{L}_E^r(Z, \nu)$ seien analog Definition A 13 erklärt.

A 15 Satz :

- a) Es ist $f \in \dot{\mathcal{L}}_E^1(Z, \nu)$ genau dann, wenn $f = g+h$ mit $g \in \dot{\mathcal{L}}_E^1(Z, \mathcal{K}(Z), \nu)$ und $h \in \dot{\mathcal{L}}^1(Z, \nu)$ mit $\dot{N}(f) = 0$, und es gilt

$$\dot{N}_{E,1}(f) = N_{E,1}(g).$$

Wenn $E = \mathbb{R}$ und $f \geq 0$, kann $g \geq 0$ und $h \geq 0$ gewählt werden.

b) Es gilt : $\Sigma \subset \dot{\Sigma}$.

Zu jeder Menge $S \in \dot{\Sigma}$ existiert eine Menge

$S' \in \Sigma$ mit $\mu(S \Delta S') = 0$.

c) Es gilt $M^\infty(Z, \mathcal{H}(Z), \nu) \subset \dot{M}^\infty(Z, \nu)$.

A 16 Satz :

Es enthalte A eine konstante Funktion .

Bezeichne $\bar{\mu}: D \rightarrow \mathbb{R}$ die Fortsetzung von μ auf $\bar{D}$,

X' die Kompaktifizierung von X nach Satz A 8 und

μ' das durch $\bar{\mu}$ auf $C(X')$ induzierte positive lineare Funktional .

a) Jede Funktion aus $\mathcal{L}_E^1(X, A, \mu)$ läßt sich zu einer Funktion aus $\mathcal{L}_E^1(X', C(X', E), \mu')$ fortsetzen .

Die Restriktion jeder Funktion aus $\mathcal{L}_E^1(X', C(X', E), \mu')$ liegt in $\mathcal{L}_E^1(X, A, \mu)$ und, wenn $E = \mathbb{R}$, stimmen die Integrale überein .

b) Zu jeder Menge $S \in \Sigma(X, D, \mu)$ existiert eine Menge

$S' \in \Sigma(X', C(X'), \mu')$ mit $S = S' \cap X$.

Für jede Menge $S' \in \Sigma(X', C(X'), \mu')$ ist

$S' \cap X \in \Sigma(X, D, \mu)$ und $\mu'(S') = \mu(S)$.

c) Jede Funktion aus $M^\infty(X, D, \mu)$ besitzt eine Fortsetzung in $M^\infty(X', C(X'), \mu)$.

B Darstellungstheorie linearer Operatoren von vektorwertigen L^p -Räumen

Die Beweise dieses Abschnitts für Integrale im Sinne von Bourbaki werden von IONESCU-TULCEA [18] übernommen .

In diesem Abschnitt gelten die folgenden Voraussetzungen :

Seien F ein Vektorraum und

G ein Teilraum des Dualraumes von F , der die Punkte trennt .

Für jede Teilmenge S von F bezeichne $\gamma(S)$ die kleinste (bezüglich $G(F,G)$) abgeschlossene, konvexe und kreisförmige Teilmenge von F , die S enthält .

Sei $\mathcal{U}$ eine Familie von Teilmengen von F derart, daß für alle $S \in \mathcal{U}$ die Menge $\gamma(S)$ kompakt in $G(F,G)$ ist und gilt :

a) Sind $S_1, S_2 \in \mathcal{U}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha S_1 + \beta S_2 \in \mathcal{U}$.

b) Ist $S \in \mathcal{U}$, so auch $\gamma(S)$.

c) Jede Teilmenge einer Menge aus $\mathcal{U}$ liegt in $\mathcal{U}$.

Weiter sei $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von G , die bezüglich $G(G,F)$ beschränkt sind und G überdecken .

Es trage F die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen von $\mathcal{B}$.

Außerdem seien Z ein kompakter topologischer Raum und μ

ein positives Radonsches Maß auf $C(Z)$,

r eine reelle Zahl mit $1 \leq r \leq \infty$.

Für eine Aussage bedeute die Formulierung "a" stets "a" (bzw. "a"), d.h. die Aussage wird synchron für den Fall der Integration nach dem 1. Erweiterungsprozeß nach STONE und dem nach BOURBAKI formuliert .

Dabei werden die Beziehungen zwischen den Integrationstheorien ausgenützt .

B1 Definition :

Seien $\mathcal{L}_E^r = \mathcal{L}_E^r(Z, C(Z, E), \mu)$ und $\hat{\mathcal{L}}_E^r = \hat{\mathcal{L}}_E^r(Z, \mu)$ und $\mathcal{I}_E^r$ bzw. $\hat{\mathcal{I}}_E^r$ entsprechend .

Weiter seien $\Sigma = \Sigma(Z, C(Z), \mu, \cdot)$, $\dot{\Sigma} = \dot{\Sigma}(Z, \mu)$ und $S_{\mathbb{R}}^*$ der Raum aller Σ' -Treppenfunktionen $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$.
Für jedes $e \in E$ sei $u_e^* : \mathcal{L}^{\infty} \cap \mathcal{L}^1 \rightarrow L_E^1$ die durch
 $u_e^*(g) := \widetilde{g} \cdot e$ für alle $g \in \mathcal{L}^{\infty} \cap \mathcal{L}^1$ definierte Abbildung.

B 2 Bemerkung :

Der von den Räumen $u_e^*(C(Z))$ (bzw. $u_e^*(S_E^*)$) ($e \in E$) aufgespannte Vektorraum D_C^* (bzw. D_S^*) liegt dicht in L_E^* .

B 3 Definition :

Für einen Banachraum V , eine Abbildung $U : V \rightarrow F$ und eine Menge $B \subset \mathbb{B}$ sei

$$\|U\|_B := \sup \{ \langle Ux, b \rangle : b \in B, x \in V, \|x\| \leq 1 \}.$$

Sei $\mathcal{J}$ die Familie aller Folgen $\mathcal{J} = (K_n)$ paarweise disjunkter kompakter Teilmengen von Z , für die $Z \setminus \bigcup K_n$ eine $\dot{\Sigma}$ -Nullmenge ist.

Weiter sei $\mathcal{J}$ die Familie aller Folgen $\mathcal{J} = (K_n)$ paarweise disjunkter Σ -meßbarer Teilmengen von Z , die bis auf $\dot{\Sigma}$ -Nullmengen mit kompakten Mengen übereinstimmen und für die $Z \setminus \bigcup K_n$ eine Σ -Nullmenge ist.

Für eine Abbildung $T : Z \rightarrow \mathcal{L}^*(E, F)$, eine Menge $B \subset \mathbb{B}$ und $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir :

$$\begin{cases} N_{p,B}^*(T) := \left(\int^* \|T(z)\|_B^p d\mu(z) \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty \\ N_{\infty,B}^*(T) := \mu\text{-ess. sup } \|T(z)\|_B. \end{cases}$$

Es bezeichne $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}} = \mathcal{L}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}[E, F, \mu]$ den Raum aller Abbildungen $T : Z \rightarrow \mathcal{L}^*(E, F)$, für die folgendes gilt :

- Für alle $e \in E$ und $b \in G$ ist $\langle T(\cdot)e, b \rangle$ Σ' -meßbar.
- Es gibt eine Folge $(K_n') \in \mathcal{J}'$, so daß für alle $e \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{T(z)e : z \in K_n'\}$ in $\mathbb{B}$ liegt.
- Für jede Menge $B \in \mathbb{B}$ ist $N_{p,B}^*(T)$ endlich.

Weiter bezeichne $\mathcal{N}^{p'}$ den Raum derjenigen Abbildungen $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{p'}$, für die $\langle T(\cdot), b \rangle$ bei beliebigem $e \in E$ und $b \in G$ stets eine μ' -Nullfunktion ist, und $L_{\mathcal{U}}^{p'} = L_{\mathcal{U}}^{p'}(E, F, \mu)$ den Raum aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{p'}$ modulo $\mathcal{N}^{p'}$.

B 4 Bemerkung :

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Für alle $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{p'}$, $e \in E$, $b \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ liegt die Funktion $\langle T(\cdot), b \rangle$ in $\mathcal{L}_R^{p\infty'}$.

Beweis :

Die Aussage folgt aus den Eigenschaften a) und c) der Definition .

B 5 Definition :

Für eine reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq \infty$, eine Abbildung $T \in L_{\mathcal{U}}^{p'}$ und eine Menge $B \in \mathcal{B}$ sei

$$N_{p,B}^{p'}(T) := \inf \{ N_{p,B}^{p'}(S) : S \in \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{p'}, \tilde{S} = \tilde{T} \}.$$

B 6 Bemerkung :

Sei s eine reelle Zahl, $1 \leq s \leq \infty$ und $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

a) Für alle $f \in \mathcal{L}_E^{r'}$, $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{s'}$ und $b \in G$ ist

$\langle T(\cdot)f(\cdot), b \rangle$ μ' -integrierbar .

b) Für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_E^{r'}$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{s'}$ mit $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ und $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$ und für alle $b \in G$ ist

$\langle T_1(\cdot)f_1(\cdot), b \rangle = \langle T_2(\cdot)f_2(\cdot), b \rangle$ Σ' -fast überall .

Beweis :

Nach Bemerkung B 4 folgt a) für alle $\tilde{f} \in D_C^{r'}$ (siehe Bemerkung B 2) .

Der Raum $D_C^{r'}$ liegt dicht in $L_E^{r'}$.

Da für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ die Halbnorm $N_{S,B}^{p'}(T)$ endlich ist, folgt Behauptung a) .

Behauptung b) zeigt man analog .

B 7 Definition :

Für eine Abbildung $t : L_E^{r'} \rightarrow F$ und eine Menge $B \in \mathcal{B}$ definieren wir :

$$\|t\|_B^{r'} := \sup \sum_{i=1}^n \langle t(h_i, f), b_i \rangle ,$$

wobei das Supremum über alle $n \in \mathbb{N}$, $(b_i) \subset B$, $\tilde{f} \in L_E^{r'}$ mit $N_r(\tilde{f}) \leq 1$, alle Familien (h_i) Σ' -meßbarer reellwertiger Funktionen auf Z mit $|h_i| \leq 1$ und $h_i h_j = 0$, falls $i \neq j$, gebildet wird .

Es besitzt t die Eigenschaft (P_1) , falls für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ gilt :

$$\|t\|_B^{r'} < \infty .$$

Es bezeichne $P_1^{(r)}$ die Menge aller Abbildungen $t : L_E^{r'} \rightarrow F$, die (P_1) erfüllen .

Nun sei $t : L_E^{r'} \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung .

Für $K' \in (K'_n) \in \mathcal{C}$ sei $t_{K'} : L_E^{1'} \rightarrow F$ definiert durch

$$t_{K'}(f) := t(1_{K'} f) \text{ für alle } f \in L_E^1 .$$

Es besitzt t die Eigenschaft (P_U) , falls eine Folge $(K'_n) \in \mathcal{C}$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $e \in E$ die Abbildung $t_{K'_n} \circ u_e^1$ (bezüglich der $\mathcal{L}^{1'}$ -Norm) beschränkte

Teilmengen von $C(Z)$ auf Mengen aus $\mathcal{U}$ abbildet .

$P_{\mathcal{U}}^{(r)}$ bezeichne den Raum aller stetigen linearen Abbildungen von $L_E^{r'}$ nach F , die $(P_{\mathcal{U}})$ erfüllen .

Der folgende Satz wurde von IONESCU-TULCEA für $t \in P_{\mathcal{U}}^{(r)} \cap P_1^{(r)}$ und $\tilde{T} \in L_{\mathcal{U}}^s[E, F, \mu]$ ($1 < s \leq \infty$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$) bewiesen .

B 8 Satz (IONESCU-TULCEA [18]) :

Zu jeder Abbildung $t \in P_1^{(1)} \cap P_{\mathcal{U}}^{(1)} \cap P_{\mathcal{U}}^{(1)}$ gibt es genau eine Abbildung $\tilde{T} \in L_{\mathcal{U}}^\infty[E, E, \mu]$, wofür gilt :

Für jede Funktion $\tilde{f} \in L_E^1$ und alle $b \in G$ ist die Funktion $\langle T(\cdot) f(\cdot), b \rangle$ Σ -meßbar

$$(7) \quad \langle t(\tilde{f}), b \rangle = \int \langle T(z) f(z), b \rangle d\mu(z)$$

und für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ ist

$$\|t\|_B = N_{\infty, B}(\tilde{T}) .$$

Bildet für alle $e \in E$ die Funktion $t \circ u_e$ beschränkte Teilmengen von $C(Z)$ auf Mengen aus $\mathcal{U}$ ab, so gilt für alle $e \in E$

$$\{T(z)e : z \in Z\} \in \mathcal{U}.$$

Beweis :

Für jede Abbildung $\tilde{T} \in L_{\mathcal{U}}^{\infty}$ existiert nach Bemerkung B 6 a) das Integral in Gleichung (7), und nach Bemerkung B 6 b) hängt der Wert des Integrals nicht von der Wahl der Repräsentanten f und T in den Klassen $\tilde{f}$ und $\tilde{T}$ ab, d.h.

T ist eindeutig bestimmt.

Nun sei $t \in P_1^{(1)} \cap P^{(1)} \cap \dot{P}^{(1)}$ und g^* ein Lifting des Raumes $\mathcal{L}^{\infty}$. (Die Existenz ist nach IONESCU-TULCEA [17] p. 544 Cor. 1 ad Theorem 1 in beiden Fällen gewährleistet.)

Nach Voraussetzung existieren Folgen $(K_n^*) \in \mathcal{V}$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$, $e \in E$ und $t_n^* := t_{K_n^*}$ die Abbildung

$t_n^* \circ u_e^*$ beschränkte Teilmengen von $S_{\mathbb{R}}^*$ (oder äquivalent dazu : von $C(Z)$) auf Mengen von $\mathcal{U}$ abbildet.

Wir können die Folgen so wählen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ $K_n = \dot{K}_n$ modulo $\dot{\Sigma}$ gilt, denn zu K_n existiert eine kompakte Menge $K_{n0} \in \dot{\Sigma}$ mit $K_n = K_{n0}$ modulo $\dot{\Sigma}$ und zu $\dot{K}_n$ existiert eine Menge $S_n \in \dot{\Sigma}$ mit $\dot{K}_n = S_n \bmod \dot{\Sigma}$ (Satz A 15 b)), und die Folgen $(K_n \cap S_n)_{m,n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}$ und $(K_{n0} \cap K_m)_{m,n \in \mathbb{N}}$

leisten das Gewünschte.

Da t in $P_{\mathcal{U}}^{(1)*}$ liegt und F die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen von $\mathcal{U}$ trägt, folgt, daß für alle $e \in E$ und $b \in G$ die Vorschrift :

g wird auf $\langle t_n^*(u_e^*(g)), b \rangle$ abgebildet, eine stetige lineare Abbildung von $S_{\mathbb{R}}^*$ in $\mathbb{R}$ definiert, wobei $S_{\mathbb{R}}^*$ mit der von

$\mathcal{L}^1$ induzierten Topologie versehen ist.

Daher existiert in $\mathcal{L}^{\infty}$ eine Funktion $[e, b]_n^*$, wofür gilt :

(O) Für jede Funktion $g \in S_{\mathbb{R}}^*$ ist

$$\langle t_n^*(u_e^*(g)), b \rangle = \int g(z) [e, b]_n^*(z) d\mu(z).$$

Wir können fordern, daß für alle $e \in E$ und $b \in G$

$$\mathcal{G}'([e, b]_n) = [e, b]_n \text{ und } [e, b]_n^* = [e, b]_n \text{ modulo } \dot{\Sigma}.$$

Aus der linken Seite von Gleichung (0) folgt, daß

$[e, b]_n^*$ auf dem Komplement von K_n^* μ' -fast überall verschwindet.

Bezeichnet für jede Menge $S \in \Sigma'$: $\mathcal{G}'(S)$ die durch

$1_{\mathcal{G}'(S)} = \mathcal{G}'(1_S)$ definierte Menge, so folgt für jedes

$z \in Z \setminus \mathcal{G}'(K_n^*)$:

$$[e, b]_n^*(z) = 0.$$

Für jede Funktion $g \in S_{\mathbb{R}}'$ ist die durch

$$u((e, b)) := \langle t_n'(u_e'(g)), b \rangle$$

definierte Abbildung $u: E \times G \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear.

Da für alle $e \in E$ und $b \in G$ gilt: $\mathcal{G}'([e, b]_n^*) = [e, b]_n^*$,

folgt, daß für alle $z \in Z$ die durch

$$v_z((e, x')) = [e, b]_n^*(z)$$

definierte Abbildung $v_z: E \times G \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear ist.

Also existiert für jedes $z \in Z$ ein $T_n'(z) \in \mathcal{L}^*(E, G^*)$,

wobei G^* den algebraischen Dualraum von G bezeichnet,

so daß für alle $e \in E$ und $b \in G$

$$[e, b]_n^*(z) = \langle T_n'(z)e, b \rangle$$

und $\tilde{T}_n = T_n$ modulo $\dot{\Sigma}$.

Es bezeichne Γ' die Einheitskugel von $\mathcal{L}^{1'}$.

Zu fest gewähltem $e \in E$ existiert eine Menge $S = \chi(S) \in \mathcal{U}$

mit $t \cdot u_e'(\Gamma' \cap S_{\mathbb{R}}') \subset S$.

Wir wählen eine Familie $(a_i)_{i \in I} \subset G$, so daß

$$S = \bigcap_{i \in I} \{y \in G^* : |\langle y, a_i \rangle| \leq 1\}.$$

Für jede Funktion $g \in S_{\mathbb{R}}' \cap \Gamma'$ und alle $i \in I$ folgt:

$$|\langle t_n'(u_e'(g)), a_i \rangle| \leq 1.$$

Da $\mathcal{G}'(\langle T_n'e, a_i \rangle) = \langle T_n'e, a_i \rangle$ für alle $i \in I$, folgt mit

Gleichung (0) für alle $z \in Z$ und $i \in I$

$$|\langle T_n'(z)e, a_i \rangle| = |[e, a_i]_n^*(z)| \leq 1,$$

d.h. die Menge aller $T_n'(z)e$ ($z \in Z$) liegt in $S \cap \mathcal{U}$.

Sei $T': Z \rightarrow \mathcal{L}^*(E, F)$ definiert durch

$$\begin{cases} T'(z) = T_n'(z), & \text{falls } z \in \mathcal{G}'(K_n^*) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ T'(z) = 0 & , \text{falls } z \in \bigcup_n \mathcal{G}'(K_n^*) \end{cases}$$

Aus der Definition folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$1_{\mathcal{G}^*(K_n)} \cdot T^* = T_n^*$$

und somit a) aus Definition B 3 .

Auf Grund ihrer Konstruktion unterscheiden sich

T und $\tilde{T}$ nur auf einer $\tilde{\Sigma}$ -Nullmenge .

Nun zeigen wir Eigenschaft b) :

Die Folge $(\mathcal{G}(K_n)) \in \mathcal{L}$ erfüllt die Bedingungen von b) für T .

Für $\tilde{T}$ wählen wir eine Folge $(\dot{C}_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ derart, daß jedes $\dot{C}_m$ in einer Menge $\dot{G}(K_n)$ enthalten ist und somit $(\dot{C}_m)$ die Bedingungen von b) erfüllt . Eine solche Folge existiert, weil auf Grund der Regularität von μ jede Menge $\dot{G}(K_n) \cap K_n$ als Vereinigung einer Folge disjunkter kompakter Mengen und einer Nullmenge dargestellt werden kann.

Es bleibt noch zu zeigen : $N_{\infty, B}(\tilde{T}^*) = |||t|||_B^*$ und

Gleichung (7).

Für $\tilde{T}$ wurden die beiden Aussagen von IONESCU-TULCEA

[18] p.778-780 bewiesen.

Da T modulo $\tilde{\Sigma}$ mit $\tilde{T}$ übereinstimmt und für $\tilde{f} \in L_E^1$ und $b \in G$ die Funktion $\langle T(\cdot)f(\cdot), b \rangle$ in $\mathcal{L}^1$ liegt,

folgt Gleichung (7) für T , und $N_{\infty, B}(\tilde{T}) = \dot{N}_{\infty, B}(\tilde{T})$.

Nach Satz A 15 ist $|||t|||_B = |||t|||_B^*$.

B 9 Definition :

Es sei $\mathcal{G}$ ein Lifting von $\mathcal{L}^\infty$ und $T \in \mathcal{L}_Q^\infty[E, F, \mu]$.

Es bedeute :

$$\mathcal{G}(T) = T,$$

daß für alle $e \in E$ und $b \in G$ gilt :

$$\mathcal{G}(\langle T(\cdot)e, b \rangle) = \langle T(\cdot)e, b \rangle .$$

B 10 Lemma :

Es sei $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\infty}[E, F, \mu]$ mit $\{T(z)e : z \in Z\} \in \mathcal{A}$ für alle $e \in E$ und den Eigenschaften von Satz B 8 und $\mathcal{G}$ ein Lifting von $\mathcal{L}^{\infty}$.

Dann existiert eine Abbildung $\hat{T} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\infty}[E, F, \mu]$ mit $\tilde{T} = \hat{T}$ und $\mathcal{G}(\hat{T}) = \hat{T}$.

Weiter gilt :

$$\hat{T} \in \dot{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}}^{\infty}[E, F, \mu] \text{ und } N_{\infty, B}(\hat{T}) \leq N_{\infty, B}(T) .$$

Beweis :

Für alle $e \in E$, $b \in G$ sei $T_{e,b}(z) := \mathcal{G}(\langle T(z)e, b \rangle)$.

Für alle $z \in Z$ ist die Abbildung $(e, b) \rightarrow T_{e,b}(z)$ von $E \times G \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear.

Daher gibt es in $\mathcal{L}(E, G^*)$ ein Element $\hat{T}(z)$, wofür gilt :

$$T_{e,b}(z) = \langle \hat{T}(z)e, b \rangle \text{ für alle } e \in E \text{ und } b \in G .$$

Wir wählen $e \in E$ beliebig fest, $S \in \mathcal{A}$ mit $S = \chi(S)$ und

$\{T(z)e : z \in Z\} \subset S$ und eine Familie $(a_i)_{i \in I} \subset G$ mit

$$S = \bigcap_{i \in I} \{y \in G^* : |\langle y, a_i \rangle| \leq 1\} .$$

Dann ist $|\langle T(z)e, a_i \rangle| \leq 1$ für alle $i \in I$ und $z \in Z$.

Da $\langle \hat{T}(z)e, a_i \rangle = \mathcal{G}(\langle T(z)e, a_i \rangle)$ folgt für alle $i \in I$ und $z \in Z$ $|\langle \hat{T}(z)e, a_i \rangle| \leq 1$ und somit :

$$\{T(z)e : z \in Z\} \in \mathcal{A} .$$

Es ist $\mathcal{G}$ auch ein Lifting von $\dot{\mathcal{L}}^{\infty}$.

Wie im Beweis von Satz B 8 sieht man, daß $\hat{T}$ Eigenschaften a) und b) von Definition B 3 erfüllt.

Es gilt $\mathcal{G}(\langle T(z)e, b \rangle) = \langle \hat{T}(z)e, b \rangle$ für alle $e \in E$ und $b \in G$, und $\hat{T}(z)e, b$ und $\langle T(z)e, b \rangle$ stimmen μ -fast überall überein.

Weiter gilt : $\dot{N}_{\infty, B}(\hat{T}) = N_{\infty, B}(\hat{T})$ und $\dot{N}_{\infty, B}(T) = N_{\infty, B}(T)$.

In IONESCU-TULCEA [18] p.781, Proposition 1

wurde gezeigt : $\dot{N}_{\infty, B}(T) \leq \dot{N}_{\infty, B}(T)$.

B 11 Lemma :

Es sei $\hat{T}$ wie in Lemma B 10.

Dann liegt $\hat{T}(z)$ in $\mathcal{L}(E, F)$ für alle $z \in Z$.

Beweis :

Nach Lemma B 10 liegt $\hat{T}$ in $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^{\infty}[E, F, \mu]$.

Die Aussage wurde in IONESCU-TULCEA [18] p.782

Bemerkung 2 bewiesen .

B 12 Satz :

Für alle $e \in E$ sei $u_e : \mathcal{L}^1 \rightarrow L_E^1$ die durch $u_e(g) := \widetilde{g} \cdot e$ definierte Abbildung und $t \in \mathcal{L}(L_E^1, F)$ derart, daß $t \circ u_e$ für alle $e \in E$ beschränkte Teilmengen von $\mathcal{L}^1$ auf Mengen aus $\mathcal{Q}$ abbildet .

Dann existiert eine Abbildung $T : Z \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$,

so daß für alle $f \in L_E^1$ und $b \in G$ die Funktion

$\langle T(\cdot)f(\cdot), b \rangle$ Σ -meßbar ist und

$$\langle t(f), b \rangle = \int \langle T(z)f(z), b \rangle d\mu(z) .$$

Beweis :

Es sei ϱ ein Lifting von $\mathcal{L}^{\infty}$.

Nach Satz B 8 existiert $T \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^{\infty}[E, F, \mu]$, das die beiden letzten Aussagen erfüllt .

Nach Lemma B 10 können wir annehmen $\varrho(T) = T$, und nach

Lemma B 11 liegt $T(z)$ in $\mathcal{L}(E, F)$ für alle $z \in Z$.

Literaturverzeichnis

- [1] ALEXANDER, G.D. :
Banach spaces possessing a Radon-Nikodym property
Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Tome XVII, Nr. 4
(1972), 435-487
- [2] BAUER, H. :
Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des
Riemann Integrals zur Theorie Radonscher Maße.
Math. Zeitschriften 65 (1956), 448-482
- [3] BAUER, H. :
Sur l'équivalence des théories de l'intégration
selon N. Bourbaki et selon M.H. Stone
Bull. Soc. Math. de France 85 (1957), 51-75
- [4] BIRKHOFF, G. :
Moyennes des fonctions bornées
Colloques Internationaux du Centre Nationale de
la Recherche Scientifique 24 (1950), 143-153
- [5] BOURBAKI, N. :
Intégration III - VI
Paris 1969
- [6] BOURBAKI, N. :
Topologie générale, chap. 9
Paris 1958
- [7] DINULEANU, N. :
Vector measures
Berlin 1967

- [8] DINCULEANU, N. :
Conditional Expectations for General Measure Spaces
J. of Multivariate Analysis 1 (1971), 347-364
- [9] DINCULEANU, N., RAO, M.M. :
Contractive Projections and Conditional Expectations
J. of Multivariate Analysis 2 (1972), 362-381
- [10] DINCULEANU, N., UHL, J.J.Jr. :
A Unifying Radon-Nikodym Theorem for Vector Measures
J. of Multivariate Analysis 3 (1973), 184-203
- [11] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J.T. :
Linear Operators I, II
New York, London, 1958, 1964
- [12] EILENBERG, S. :
Banach space methods in topology
Annals of Math., 43, N^o 3 (1942), 568-579
- [13] EKELAND, I. :
Désintégration des mesures vectorielles
CR. Paris, A 266 (1968), 816-819
- [14] GROTHMEYER, K. P. :
Topologie
Mannheim 1969
- [15] GROTHENDIECK,
Produits tensoriels
Memoirs of the AMS 16 (1955)
- [16] HOFMAN, K. :
Banach spaces of analytic functions
Englewood Cliffs, N.J., USA 1962

- [17] IONESCU-TULCEA, A.u.C. :
On the lifting property I
J. of Math. Anal. and Applic. 3 (1961), 537-546
- [18] IONESCU-TULCEA, A.u.C. :
On the lifting property II
J. of Math. and Mech. 11 (1962), 773-796
- [19] JACOBS, K. :
Maß und Integral
Vorlesungsausarbeitung, Erlangen 1966
- [20] KAKUTANI, S. :
Concrete representation of abstract (M)-spaces
Ann. of Math. 2 (1941), 994-1024
- [21] KELLEY, J.L. :
Averaging Operators on $C_\infty(X)$
Illinois J. of Math. 2 (1958), 214-223
- [22] KOCH, D. :
Charakterisierung von Averaging Operatoren durch
Lokalitäts-, Desintegrierbarkeits- und Zerlegbarkeits-
eigenschaften
Diplomarbeit, Erlangen 1974
- [23] KÖLZOW, D. :
Zur konkreten Darstellung der abstrakten Integrale
von Stone und Bourbaki-McShane
Dissertation, Greifswald 1960
- [24] MARK, G. :
Averaging Homomorphismen
Diplomarbeit, Erlangen 1975

- [25] MOY, S.C. :
Characterization of conditinal expectation
as a transformation on function spaces
Illinois J. of Math. 2 (1958), 214-223
- [26] MYERS, S.B. :
Normed linear spaces of continuous functions
Bull. Amer. Math. Soc. 56 (1950), 233-241
- [27] NÜBELING, G. :
Analytische Topologie
Berlin, Göttingen, Heidelberg 1954
- [28] NÜBELING, G., BAUER, H. :
Über die Erweiterungen topologischer Räume
Math. Annalen 130 (1955), 20-45
- [29] ORHON, M. :
A note on averaging operators
J. London Math. Soc. (2), 6 (1972), 139-142
- [30] PFLAUMANN, E., UNGER, H. :
Funktional-Analysis I
Mannheim 1968
- [31] RAUCH, E. :
Desintegration von Maßen und Zuständen
Diplomarbeit, Erlangen 1974
- [32] RICKART, C.E. :
Banach Algebras
Princeton, New Jersey, New York 1960
- [33] RIEFFEL, M.A. :
The Radon-Nikodym Theorem for the Bochner Integral
Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 466-487

- [34] ROBERTSON, A.P. u. W. :
Topologische Vektorräume
Mannheim 1967

- [35] SCHAEFER, H.H. :
Topological vector spaces
New York, London 1966

- [36] STONE, M.H. :
Notes on Integration I - IV
Proc. of the Nat. Acad. of Sciences, USA 34 (1948),
336-342, 447-455, 483-490; 35 (1949), 50-58

- [37] VINCENT-SMITH, G. :
On the Hahn-Banach theorem for modules
Proc. London Math. Soc. 17 (1967), 72-90

- [38] VINCENT-SMITH, G. :
Positive maps between partially ordered bimodules
Proc. London Math. Soc. 19 (1969), 661-674

Lebenslauf

Am 4. Juni 1949 wurde ich als erstes Kind des Regierungsoberinspektors Günter Koch und seiner Ehefrau Anni, geborene Räbel, in Altdorf bei Nürnberg geboren.

Von September 1955 bis Juli 1959 besuchte ich die Volksschule und ab September 1959 das Leibniz-Gymnasium in Altdorf. Dort legte ich im Juli 1968 das Abitur ab.

Seit November 1968 studiere ich Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg. Im Oktober 1970 bestand ich die Diplomvorprüfung und im Mai 1974 die Diplomprüfung in Mathematik. Seit Juni 1974 bin ich Doktorand bei Herrn Professor Dr.D.Kölzow und erhielt ab November 1974 ein Stipendium nach dem Bundesgraduiertenförderungsgesetz.

Erlangen, Dezember 1976

Copy - Center 2000
852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197